2. Sous-groupes distingués, quotients

Rappel : Sous-groupe distingué
On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est distingué (ou normal) si pour tout $x \in G$ on a $xH = Hx$.

Exercice 1. 1. Montrer que le sous-groupe $H = \{id, (12)\} \subset S_3$ n'est pas distingué, et expliciter les classes à droite et à gauche modulo H.

2. Trouver tous les sous-groupes distingués du groupe symétrique S_3.

Exercice 2. On considère le sous-groupe H de S_5 engendré par (12) et (13).

1. Le sous-groupe H est-il distingué dans S_5 ?
2. Déterminer le nombre de classes à droite modulo H.

Exercice 3. Montrer que tous les sous-groupes du groupe quaternionique $\mathbb{H}^8$ sont normaux dans $\mathbb{H}^8$.

Exercice 4. Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué.

Exercice 5. Montrer que le groupe des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe symétrique S_3.

Rappel : Quotient
Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble des classes (à droite ou à gauche) de G modulo H forme un groupe G/H appelé groupe quotient de G par H.

Exercice 6. Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G. Montrer que

$$card(HK) = card(KH) = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

Exercice 7. Soit H un sous-groupe normal de A_5.

1. Montrer que si H contient un 3-cycle alors $H = A_5$.
2. Montrer que si H contient σ produit de deux transpositions à supports disjoints, alors il existe un 3-cycle $\gamma \in A_5$ tel que $\gamma\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$ soit un 3-cycle.
3. En s'inspirant de la question précédente, montrer que H contient toujours un 3-cycle.
4. Montrer que A_5 est un groupe simple.

Exercice 8. 1. Donner un exemple de groupe contenant au moins deux sous-groupes d'indice 2.

2. Soit H un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^2 \in H$. En déduire que H contient l'ensemble des 3-cycles et donc que $H = A_n$.
3. Pour un groupe G, on pose $D(G)$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs $\{\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau, \forall \sigma, \tau \in G\}$. Montrer que pour $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.
4. Déterminer tous les sous-groupes distingués de S_3, S_4, A_3 et A_4.

Exercice 9. Soit G un groupe et H un sous-groupe. Le normalisateur de H dans G est défini par :

$$N_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } gHg^{-1} = H\}.$$

1. Quel est le normalisateur d'un sous-groupe distingué ? Est-ce une caractérisation des sous-groupes distingués ?
2. Vérifier que H est distingué dans son normalisateur.
3. Dans le groupe S_4, trouver le normalisateur du sous-groupe à 2 éléments $\langle (12)(34) \rangle$.
4. Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal.

Rappel : Passage au quotient
Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, il existe un unique morphisme injectif $\overline{f} : G/Ker(\varphi) \to G'$ tel que $f(x) = \overline{f}(xKer(\varphi))$.

Exercice 10. 1. Soit H le sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ constitué des polynômes $P(X)$ vérifiant $P(\overline{1}) = P(\overline{2}) = 0$. Montrer que H est un sous-groupe (additif) et donner le nombre d'éléments dans le quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/H$.

2. On note (X^2+1) le sous-groupe de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme $(X^2+1)Q(X)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 11. On se donne N et H deux groupes, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupe et on définit sur $N \times H$ la loi de composition suivante :

$$(n,h)(n',h') = (n\varphi(h)(n'), hh')$$

a) Montrer que cela muni $N \times H$ d'une structure de groupe, on note $N \rtimes_\varphi H$ le groupe ainsi obtenu, et on l'appelle produit semi-direct de H et N.
b) Montrer que H et N s'injectent dans $N \rtimes_\varphi H$ et que H n'est pas distingué lorsque $\varphi \neq Id$.
c) Si H et K sont des sous-groupes de G sous quelles conditions peut-on écrire $G = HK \cong H \ltimes K$?
d) Montrer que $S_n = A_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 12. a) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On note ϕ la surjection canonique $\phi : G \to G/H$. Montrer que l'ordre d'un élément x de G est un multiple de l'ordre de $\phi(x)$.
b) Pour tout $x \in G$ on pose τ_x l'application de G dans G définie par $\tau_x(y) = xyx^{-1}$. Montrer que τ_x est un automorphisme de G et que l'application $x \to \tau_x$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}(G)$. Quel est le noyau de ce morphisme ?
c) On suppose que G est fini et que H est un sous-groupe distingué dont l'ordre est le plus petit nombre premier p divisant l'ordre de G. Montrer que pour tout $x \in G$ l'ordre de la restriction à H de τ_x est un diviseur de $p-1$ et de l'ordre de G. En déduire que τ_x restreint à H est l'identité pour tout x et donc que H est contenu dans le centre de G.