Licence de mathématiques L3 mars 2013
Université Paul Sabatier

Algèbre 2

Examen partiel

Durée: 2 heures

Ni document ni calculatrice. Le barême sur 21 est indicatif.

I - Le groupe symétrique S_3 (5 points).

1. Montrer que le groupe symétrique S_3 est isomorphe au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Montrer que S_3 est également isomorphe au groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des automorphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

II - Quizz (7 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un (contre-)exemple.

1. Si $H_1, H_2 \subset G$ sont deux sous-groupes d'un groupe G, alors l'union $H_1 \cup H_2$ n'est jamais un sous-groupe de G : vrai ou faux ?
2. Il existe un groupe non commutatif d'ordre 7 : vrai ou faux ?
3. Les permutations (123) et (432) sont conjuguées dans le groupe symétrique S_4 : vrai ou faux ?
4. Si H est distingué dans K et K est distingué dans G, alors H est distingué dans G : vrai ou faux ?
5. Le groupe alterné A_4 est simple : vrai ou faux ?
6. Il existe un sous-groupe d'ordre 4 dans A_5 : vrai ou faux ?
7. Il existe un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini : vrai ou faux ?

III - Normalisateur et centralisateur (9 points).

Soient G un groupe fini et $x \in G$ un élément d'ordre n. On note :

$$H = \langle x \rangle \text{ le sous-groupe engendré par } x;$$
$$C = \{y \in G; xy = yx\} \text{ le } \textit{centralisateur} \text{ de } x;$$
$$N = \{y \in G; Hy = yH\} \text{ le } \textit{normalisateur} \text{ de } H.$$

Remarquons que H, C, N sont des sous-groupes de G, et que l'on a toujours $H \subset C \subset N \subset G$.

1. (a) Expliciter H, C et N dans le cas où G est le groupe symétrique S_4 et $x = (123)$.
   Indication : dans ce cas on montrera que $H = C \subsetneq N$.

   (b) Même question, toujours dans le cas $G = S_4$, avec $x = (12)$.
   Indication : dans ce cas on montrera que $H \subsetneq C = N$.

2. On revient au cas général. Montrer que pour tout $y \in N$, il existe un entier k premier avec n tel que $yxy^{-1} = x^k$. Cet entier k est-il unique ?

3. Montrer que l'on obtient une application bien définie $\varphi : N \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ en posant $\varphi(y) = \overline{k}$, où k provient de la question précédente, et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est le sous-groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, par rapport à la loi multiplicative.

   Montrer que cette application est un morphisme de groupe.

4. Calculer le noyau de φ.

5. On suppose dans cette dernière question que G est un groupe symétrique S_m (où $m \geq 2$); x est donc ici une permutation d'ordre n dans S_m.

   (a) Montrer que les générateurs du groupe H sont deux à deux conjugués dans G.

   (b) En déduire que les groupes N/C et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ sont isomorphes.