1. Donner un exemple de fonction f avec un pôle d'ordre 2 en $z = 0$, et tel que $\mathrm{Res}_0(f) = -1$.

Réponse :

$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$ convient.

Commentaires. Toute fonction f candidate doit déjà admettre une singularité isolée en zéro, et donc admettre un développement en série de Laurent centré en 0, c'est à dire un développement de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \dots + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z^1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Maintenant on regarde les contraintes imposées par l'énoncé:

- f admet un pôle d'ordre 2 signifie que le développement commence à $n = -2$, donc est de la forme
$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z^1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$
avec $c_{-2} \neq 0$. Le choix le plus simple semble être $c_{-2} = 1$.
- $\mathrm{Res}_0(f) = -1$ signifie $c_{-1} = -1$: c'est la définition du résidu que d'être égal au coefficient d'indice $n = -1$, autrement dit le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement.
- Bilan : l'énoncé impose $c_n = 0$ pour $n \leq -3$, $c_{-2} \neq 0$ (par exemple $c_2 = 1$), $c_{-1} = -1$, et pas de contraintes pour les c_n, $n \geq 0$ à part le fait qu'il faut qu'ils ne soient pas trop immenses pour que la série ait un rayon de convergence $R > 0$ (le plus simple me semble de les prendre tous nuls). C'est comme ça que j'aboutis à la réponse proposée.

Autres réponses possibles ?

- $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{z^3 - z}{z^2}$. Pour y voir clair, commençons par reécrire sous forme de développement en série de Laurent:
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{z^3 - z}{z^2} = \frac{1}{2i\pi}(z - \frac{1}{z}) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{z} + \frac{1}{2i\pi}z.$$
On voit que cette fonction admet un pôle d'ordre 1 (et pas 2), et que son résidu en 0 est $-\frac{1}{2i\pi}$ (et pas -1)...
- $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$. A nouveau, je commence par mettre sous forme de série de Laurent, en me ramenant au développement de $1/(1-z)$ que l'on connait bien :
$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-1)} &= -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - \dots\end{aligned}$$
On voit que f admet bien un pôle d'ordre 2, et que le coefficient de $\frac{1}{z}$ est bien -1, donc la fonction proposée convient, mais elle n'était pas mise sous la forme la plus agréable pour faire la vérification ! (la forme la plus agréable, c'est de donner directement la fonction sous forme de développement de laurent...).

- $f(z)=\frac{-1}{z^2}$. Cette fonction admet bien un pôle d'ordre 2, par contre son résidu est 0. Le résidu est par définition le coefficient de $\frac{1}{z}$, et pour cette fonction -1 est le coefficient de $\frac{1}{z^2}\cdots$

- $f(z)=\frac{-1}{z^2(z^2+1)}$. A nouveau je mets sous forme de développement:

$$f(z)=\frac{-1}{z^2(z^2+1)}=\frac{-1}{z^2}\frac{1}{1+z^2}=\frac{-1}{z^2}(1-z^2+z^4-z^6+\dots)=\frac{-1}{z^2}+1+\dots$$

  et je vois que f admet un pôle d'ordre 2, mais un résidu nul.

  Donnons au passage un autre moyen de calculer le résidu. Si

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z^1}+c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

  admet un pôle d'ordre 2 en $z=0$, alors

$$\begin{aligned} z^2f(z)&=c_{-2}+c_{-1}z+c_0z^2+\dots\\ (z^2f(z))'&=c_{-1}+2c_0z+\dots \end{aligned}$$

  et donc

$$c_{-1}=\lim_{z\to 0}(z^2f(z))'.$$

  En appliquant ceci à la fonction proposée, on trouve $(z^2f(z))'=(-(z^2+1)^{-1})'=\frac{2z}{(z^2+1)^2}$ qui tend vers 0 quand $z\to 0$, on retrouve donc le fait que le résidu est égal à 0 sur cet exemple.

- $f(z)=\frac{-e^z}{z^2}$. Un peu compliqué, mais ça marche, en effet :

$$\frac{-e^z}{z^2}=-(1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots)\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\dots$$

2. Donner un exemple de fonction admettant une singularité essentielle au point $z = 1$.

Réponse : $\exp(\frac{1}{z-1})$ convient.

Commentaires.

- Une façon de justifier que la fonction admet une singularité essentielle en $z = 1$ est de constater que la partie principale du développement en série de Laurent en $z = 1$ admet une infinité de termes. On part du développement en série entière centré en 0 de la fonction exponentielle :
$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$
On remplace z par $(z-1)^{-1}$, et on réordonne les termes (pour que les puissances négatives soient à gauche, et les puissances positives à droites...) :
$$\begin{aligned}\exp(\frac{1}{z-1}) &= 1 + (z-1)^{-1} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \dots \\ &= \underbrace{\dots + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}}_{\text{partie principale avec infinité de termes}} + 1\end{aligned}$$

- Une autre façon est de constater que la fonction f n'admet pas de limite (finie ou infini) quand $z \to 1$. Pour cela il suffit de constater que les limites quand $z \to 1$ par valeurs réelles positives ou négatives existent mais sont distinctes (respectivement $+\infty$ et 0).

Autres réponses possibles ?

- $\sin(\frac{1}{z-1})$, ou $\cos(\frac{1}{z-1})$. Cela marche aussi, la justification par développement en série de Laurent est similaire, par contre pour justifier avec les limites c'est un peu moins facile.

- $\exp(\frac{z}{z-1})$, ou $z^2 \exp(\frac{1}{(z-1)^2})$. Marchent aussi, mais semblent un peu plus compliqués. Toujours essayer de donner l'exemple le plus simple qui répond à la question !

- $|z-1|$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{C}$, mais n'est pas holomorphe (sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$!). Donc elle n'admet pas de singularité isolée en 1, donc encore moins une singularité essentielle (qui sont une sous-classe des singularités isolées). Pour voir que cette fonction n'est holomorphe nulle part, un argument qui utilise un résultat récent du cours est de constater que cette fonction est à valeurs réelles, donc n'est pas une application ouverte de U dans $\mathbb{C}$, pour aucun ouvert U. Vous pouvez aussi le montrer de façon élémentaire, en constatant que la limite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ n'existe pas, pour aucun $z_0 \in \mathbb{C}$.

3. Quel est le résidu de la fonction $\exp(1/z)$ en 0 ?

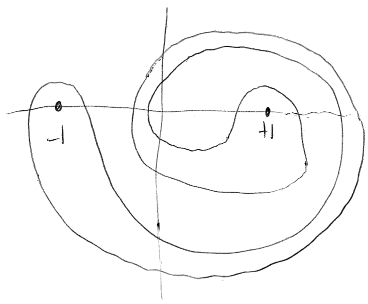
Réponse :

Le résidu est 1.

Commentaires. On a $\exp(1/z) = \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1$, et par définition le résidu demandé est le coefficient de $\frac{1}{z}$. Prenez l'habitude de toujours écrire les développements en série de Laurent avec les puissances négatives à gauche et les positives à droite, sinon on s'embrouille vite...

4. Dessiner un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}^*$, contenant 1 et -1, sur lequel il existe une branche du logarithme $\ell \colon U \to \mathbb{C}$ vérifiant $\ell(1) = 2i\pi$ et $\ell(-1) = -i\pi$.

Réponse :

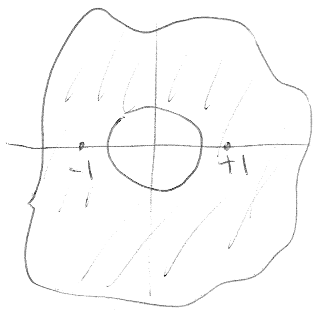


Commentaires. Il faut comprendre pourquoi il est nécessaire de dessiner un tel ouvert en spirale, et pourquoi il faut que ça tourne dans un sens précis, et quel est le nombre de tours nécessaires... Ok, c'est parti :

On se donne $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe contenant 1 et -1. Première question:

- Existe-t-il une branche du logarithme $\ell \colon U \to \mathbb{C}$?

Si oui, alors il en existe une infinité (choix d'une constante de la forme $2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$), et il en existe une unique avec $\ell(1) = 2i\pi$. Le critère pour l'existence est qu'il faut pouvoir définir une fonction argument continue sur U, ce qui (résultat du cours) revient à montrer que l'indice de tout lacet dans U par rapport à 0 est nul. Par exemple, sur $\mathbb{C}^*$, ou encore sur l'ouvert U suivant, il n'est PAS possible de définir une branche du logarithme (parce que U contient un cercle, d'indice égal à 1 par rapport à l'origine):



Si U admet une branche du logarithme, on peut alors poser une deuxième question:

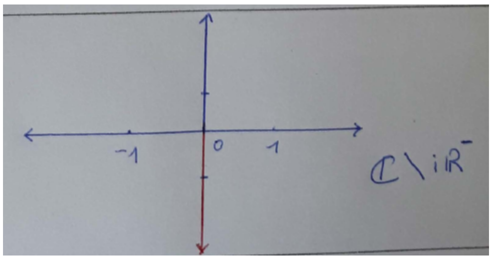
- Si on choisit ℓ tel que $\ell(1) = 2i\pi$, quelle est la valeur de $\ell(-1)$?

La réponse à cette deuxième question va dépendre de la forme de U, informellement de "combien de fois l'ouvert U s'enroule autour de 0". En termes d'argument, il s'agit de voir que si on pose $\arg(1) = 2\pi$, alors en prolongeant par continuité sur U on a une valeur uniquement déterminée pour $\arg(-1)$ (et pour le test on voulait avoir $\arg(-1) = -\pi$...)

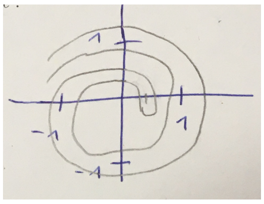
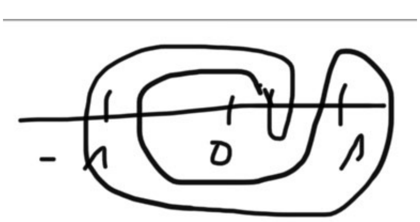
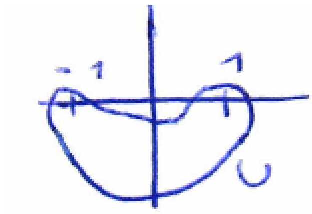
Voici quelques (contre-)exemples, tirés de vos réponses:

- $U = \mathbb{C} \setminus \{ri \mid r \geq 0\}$. Cet ouvert est ok pour définir une branche du logarithme. Si on choisit $\arg(1) = 2\pi$, alors par continuité les arguments des points de U sont dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}[$. En particulier $\arg(-1) = \pi$, et non pas $-\pi$ comme désiré.

- Problème similaire avec $U = \mathbb{C} \setminus \{-ri \mid r \geq 0\}$:

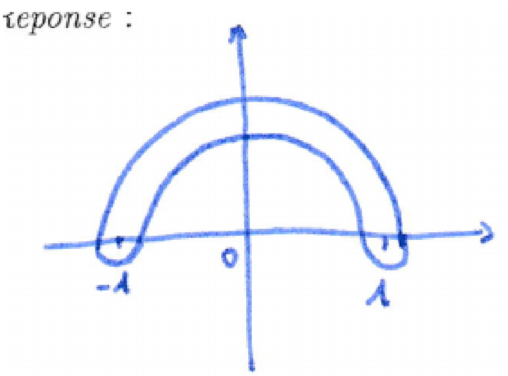


Cet ouvert est ok pour définir une branche du logarithme, mais si $\arg(1) = 2\pi$, alors par continuité $\arg(-1) = 3\pi$ (par continuité les arguments sont coincés dans l'intervalle $]2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{3\pi}{2}[$.

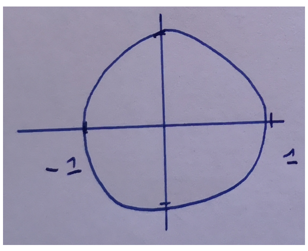
-   

Ces ouverts sont ok pour définir une branche du logarithme, mais si $\arg(1) = 2\pi$, alors par continuité $\arg(-1) = \pi$. Il y a de petites bizarreries sur le dessin de gauche: il faudrait fermer le contour, et plutôt que 1 et -1 sur l'axe des ordonnées on voudrait i et $-i$. Dans les deux premiers dessins, vu que 1 et -1 sont reliés par le passage dans le demi-plan inférieur, les "bras" de U dans le demi-plan supérieur n'ont aucune influence sur la valeur de $\arg(-1)$ par rapport à $\arg(1)$...

- Le dessin similaire "par au-dessus" ne marche pas non plus:

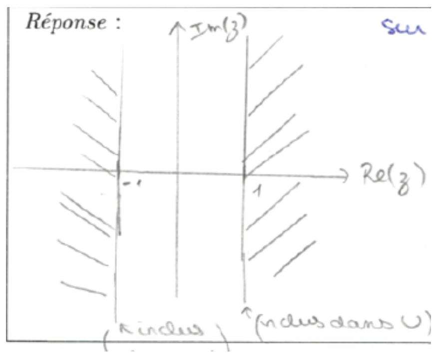


Pour passer d'un argument de 2π à un argument de $-\pi$ il faut 3π d'écart, c'est à dire 1 tour et demi, pas un demi-tour ! Et de plus il faut *retrancher* 3π, c'est à dire effectuer le tour et demi dans le sens anti-trigonométrique...

- 

Ce disque ouvert n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}^*$ (il contient 0), et il ne contient ni $+1$ ni -1 (qui sont sur sa frontière), donc c'est mal parti...

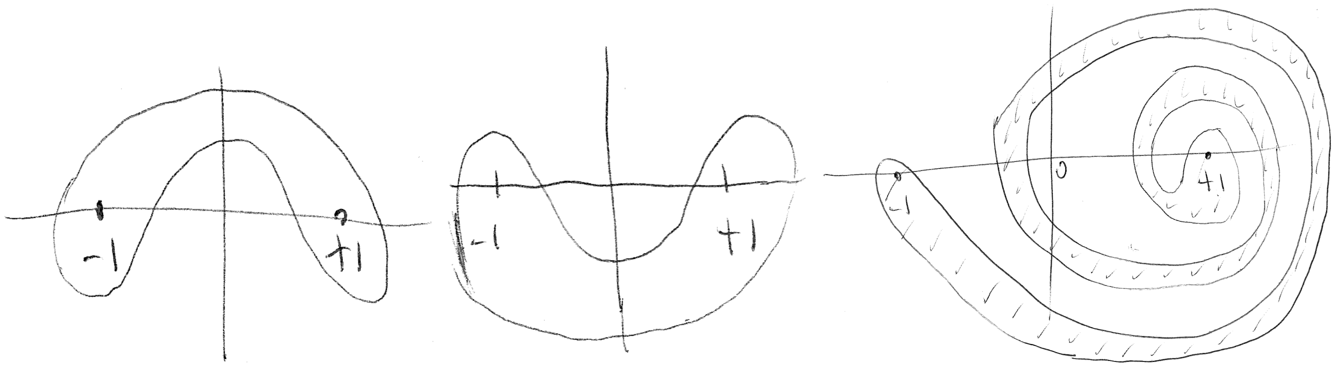
•



Il faudrait que $+1$ et -1 soit dans l'ouvert U, pas à la frontière. A part ce détail, ce dessin est intéressant : on peut définir une fonction argument continue qui vaut $\arg(1) = 2\pi$ et $\arg(-1) = -\pi$, il n'y a pas de problème de prolongement puisque l'ouvert est en deux morceaux. Mais justement l'énoncé précisait qu'on veut un ouvert *connexe*, ici ce n'est pas le cas !

Test final

Pour chacun des trois ouverts ci-dessous, si ℓ est la branche du logarithme telle que $\ell(1) = 0$, à quoi est égal $\ell(-1)$? Les deux premiers devraient maintenant être faciles, le troisième est juste pour vous donner mal à la tête (et il contient un piège!)



(solution dans le cours de la semaine prochaine...)