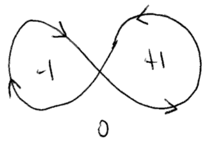
1. Dessiner un lacet γ qui découpe le plan complexe en trois composantes connexes où la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ prend respectivement les valeurs -1, 0 et $+1$.

Réponse :



NB: Il est important d'indiquer l'orientation de votre paramétrage en mettant des flèches sur votre dessin.

2. Si γ est le cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$ (parcouru une fois dans le sens trigonométrique), calculer l'intégrale de chemin $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

Réponse :

En utilisant le paramétrage $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi.$$

NB: on pouvait aussi dire que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1$ car c'est l'indice de 0 par rapport au cercle. Notez cependant que le calcul ci-dessus est fondamental (c'est "l'exemple fondamental" du cours!), il est conseillé de le savoir par coeur.

3. Si γ est le triangle équilatéral de sommets 1, $e^{2i\pi/3}$, $e^{-2i\pi/3}$ (parcouru une fois dans le sens trigonométrique), calculer l'intégrale de chemin $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$.

Réponse :

La fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ admet une primitive sur son domaine de définition $\mathbb{C}^*$ (précisément, la primitive est $z \mapsto -\frac{1}{z}$), donc l'intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle.

NB: Ne surtout pas se lancer dans des calculs explicites !

4. La fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & |\sin z| \end{array}$ est-elle bornée ?

Réponse :

Par le théorème de Liouville, si la fonction $z \mapsto \sin z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ était bornée, alors elle serait constante, absurde.

NB: On peut aussi constater que pour $x > 0$ un réel positif très grand, $\sin(ix) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i}$ est de module proche de e^x donc aussi très grand.