1. Donner un exemple de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ qui ne se prolonge pas en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

> *Réponse* :
>
> La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ convient, elle est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, de dérivée $z \mapsto -\frac{1}{z^2}$.
>
> NB: La fonction $z \mapsto e^{1/z^2}$ convient aussi, mais c'est un exemple bien compliqué pour une question si simple!

2. Donner un exemple de série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ convergeant uniformément mais pas absolument.

> *Réponse* :
>
> En prenant $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (fonctions constantes), on obtient la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui est convergente (donc uniformément convergente puisqu'on a affaire à des fonctions constantes), mais elle n'est pas absolument convergente.
>
> NB: La série $\sum x^n$ converge simplement vers la fonction $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$, mais pas uniformément !

3. Donner un exemple de série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R = 0$.

> *Réponse* :
>
> On pouvait prendre $\sum n^n z^n$ (et appliquer Hadamard), ou encore $\sum n! z^n$ (et appliquer d'Alembert).

4. Expliciter un paramétrage $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{C}$ du chemin constitué de la concaténation des segments $[i,0]$ et $[0,-1]$ du plan complexe.

> *Réponse* :
>
> $$\gamma\colon t \mapsto \begin{cases} (1-t)i & \text{si } t \in [0,1] \\ 1-t & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$
>
> NB: un paramétrage est défini sur un intervalle réel, donc écrire $t \in [i,0]$ n'a guère de sens...