Université Paul Sabatier S6, Année 2018–2019
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 3

Exercice 1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que U est connexe par arcs et par chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exercice 2. Soit U un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Montrer que si f vérifie $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ alors f est constante.

Exercice 3. Soit f une fonction analytique sur le disque ouvert $D(0, R)$ avec $R > 0$. On note $P = \Re e f$ et $Q = \Im m f$. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$|P(0)| = |Q(0)| \iff \int_0^{2\pi} (P(re^{it}))^2 \, dt = \int_0^{2\pi} (Q(re^{it}))^2 \, dt.$$

Exercice 4. Soit U un ouvert connexe contenant $\overline{\mathbb{D}}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$. On suppose que $|f|$ n'est pas constant.

1) Montrer que f admet un maximum sur $\overline{\mathbb{D}}$.
2) Montrer que ce maximum ne peut pas être dans $\mathbb{D}$.
3) En déduire que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.
4) Montrer que f a un zéro dans $\mathbb{D}$.

Exercice 5. Montrer qu'il n'existe pas de bijection holomorphe entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Montrer qu'une fonction entière non constante ne peut pas avoir deux périodes ω_1 et ω_2 indépendante sur $\mathbb{R}$. On dit que ω est une période pour f si $f(z + \omega) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit f une fonction entière telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq 1 + e^{|z|} |\sin |z||.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{e^{isz}}{1+z^2} \, dz$ où γ est la réunion du demi-cercle de rayon $R > 0$ orienté de façon trigonométrique suivi du segment $[-R, R]$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2} \, dx$.

Exercice 9. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer $g(z) = f(z)f(-z)$.*