Université Paul Sabatier S6, Année 2018–2019
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 2

Exercice 1. (1) Soit $r > 0$. On pose $\Gamma(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$A = \int_\Gamma \frac{dz}{z}.$$

(2) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Reconnaître la courbe γ^* et calculer en fonction de A

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

(3) Exprimer I en fonction de

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

En déduire la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 2. Prolonger la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z^3 + e^z - 1}{z}$ pour $z \neq 0$. Justifier que la fonction f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. Calculer les valeurs des intégrales

$$\int_{C(0,1)} \frac{z^3 + e^z - 1}{z} dz, \ \int_{C(0,1)} \frac{z^3 + e^z}{z} dz.$$

Exercice 4. Discuter en fonction du sens de parcours choisi, l'indice par rapport à 0 des courbes C et C' suivantes : La courbe C est formée du huit qui est la réunion des cercles de centres 0 et 2 de rayon 1, La courbe C' est la réunion de C et du cercle de centre 1 et de rayon 2.

Exercice 5. Montrer que l'application $z \mapsto 1/z$ admet une primitive sur chacun des domaines suivants $H_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re e(i^k z) > 0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Déterminer une primitive sur $U = H_0 \cup H_1 \cup H_{-1}$ puis une primitive sur $V = H_2 \cup H_1 \cup H_{-1}$. Les comparer.

Exercice 6. Calculer l'intégrale sur le demi-cercle de rayon $R > 1$ issu de R terminant en $-R$ de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Exercice 7. On considère un polynôme P de racines distinctes $a_1, a_2, ..., a_k$ avec $k > 1$. Soit C_R le cercle de centre 0 et de rayon R orienté dans le sens trigonométrique.

1) Montrer que pour R assez grand l'intégrale suivante est bien définie et calculer sa limite lorsque R tend vers $+\infty$:

$$\int_{C_R} \frac{1}{P(z)} dz.$$

2) En déduire que

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{P'(a_j)} = 0.$$