Université Paul Sabatier S6, Année 2018–2019
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 1

Exercice 1. (1) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$?
(2) Calculer la somme pour z dans le disque ouvert $D(0,R)$.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

Exercice 3. Démontrer que la convergence normale implique la convergence simple.

Exercice 4. Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$. Peut on la prolonger? Etudier sa régularité.

Exercice 5. Démontrer le critère de d'Alembert.

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où :

$$(1)\ a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2)\ a_n = n! \quad (3)\ a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^n}{n+1} & \text{si } n = 3m+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence R' de la série $\sum b_n z^n$ dans les cas suivants :

$$(1)\ b_n = a_n^2 \quad (2)\ b_n = \begin{cases} a_m & \text{si } n = 2m, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)\ b_n = \frac{a_n}{n!}.$$

Exercice 8. Montrer que le rayon de convergence est invariant par $a_n \mapsto a_{n+1}$ et par $a_n \mapsto P(n)a_n$.
Application : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ admet le même rayon de convergence.

Exercice 9. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est localement développable en série entière sur $\mathbb{C}^*$ (cad analytique)

Exercice 10. Soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) Montrer que la fonction exp est définie sur $\mathbb{C}$ et continue.
(2) Montrer que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.
(3) Démontrer que exp est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses dérivées complexes successives.
(4) Déterminer toutes les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables f sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation différentielle complexe $f' = af$, où $a \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe fixé. Qu'en est-il si a est une fonction holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}$?
(5) Déterminer l'image par exp des doites horizontales $\Im z = \alpha$ et des droites verticales $\Re z = \beta$ et de $\mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Démontrer que exp induit un homéomorphisme de la bande $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C}; \alpha - \pi < \Im z < \alpha + \pi\}$ sur le domaine $D_\alpha := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+ \cdot e^{i\alpha})$ et déterminer son homéomorphisme inverse (réciproque) ℓ_α.
(6) Démontrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Calculer $|\sin z|$ et $|\cos z|$. Les fonctions cos et sin sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?

(7) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Exercice 11. (Sommation d'Abel) Soient (u_n), (v_n) des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \ldots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles S_1^m est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n.v_n$ est convergente.

Exercice 12. En utilisant le critère d'Abel, montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$

Exercice 13. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$.

1) En utilisant la transformation d'Abel montrer que pour tout $c \geq 1$ la série converge uniformément sur

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, |1-z| \leq c|(1-|z|)\}$$

2) En déduire que

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{z \to 1, z \in A, z \neq 1} \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

3) Montre que pour tout $\alpha \in [0, \pi : 2[$ la série entière converge uniformément sur le secteur

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1 - re^{it}, | \leq \alpha,\ 0 \leq r \leq \cos\alpha\}$$