1. Calculer l'ordre de la permutation $\sigma \in S_{10}$ suivante :

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8)(9\,10)$$

Réponse :

La permutation σ est de type $2, 3, 5$, son ordre est donc $\mathrm{PPCM}(2, 3, 5) = 30$.

2. Donner une permutation $\sigma \in S_6$ telle que $\sigma(1\,3\,5)\sigma^{-1} = (2\,4\,6)$.

Réponse :

On a $\sigma(1\,3\,5)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\,\sigma(3)\,\sigma(5))$, donc par exemple $\sigma = (1\,2)(3\,4)(5\,6)$ convient.

NB: Le choix de σ n'est pas unique, en fait sur cet exemple on pourra vérifier qu'il y a 18 choix possibles : pouvez-vous tous les trouver ?

3. Donner la liste des classes de conjugaison avec leur cardinal pour le groupe alterné A_5.

Réponse :

Le groupe A_5 admet 5 classes de conjugaison :

- La classe de l'identité, de cardinal 1;
- La classe des 3-cycles, de cardinal 20;
- La classe des doubles transpositions, de cardinal 15;
- Deux classes de 5-cycles, chacune de cardinal 12.

NB: On demandait bien les classes de conjugaison dans A_5. Dans S_5 la réponse serait différente, il n'y aurait qu'une seule classe de 5-cycles, de cardinal 24.

4. Donner un exemple de deux groupes d'ordre 8 non abéliens non isomorphes.

Réponse :

Le groupe diédral D_4 (isométries préservant un carré) est non abélien d'ordre 8.

Le groupe quaternonique $\mathbb{H}_8$, sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

est également non abélien d'ordre 8.

Ces deux groupes ne sont pas isomorphes: en effet ils ne contiennent pas le même nombre d'éléments d'ordre 2 (vérifier que D_4 en contient cinq, alors que $\mathbb{H}_8$ n'en contient qu'un seul).