1. Donner un exemple de groupe d'ordre fini, commutatif et non cyclique.

> *Réponse* :
>
> Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ convient.
>
> Si l'on préfère un exemple géométrique, on pouvait prendre le groupe $\mathrm{Isom}(R)$ des isométries préservant un rectangle, qui est en fait isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Soit $\sigma \in S_8$ le produit de cycles suivant :

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6) \circ (7\,5\,3\,1) \circ (8\,2\,3)$$

Calculer la décomposition canonique de σ.

> *Réponse* :
>
> $\sigma = (1\,7\,6)(3\,8)(4\,5)$.

Pour les deux questions qui suivent, on note $\mathrm{Isom}(T) = \{\mathrm{id}, S_A, S_B, S_C, R_{2\pi/3}, R_{-2\pi/3}\}$ le groupe des isométries du plan préservant un triangle équilatéral T, avec les notations usuelles du cours.

3. Expliciter un isomorphisme du groupe $\mathrm{Isom}(T)$ vers le groupe symétrique S_3 (sans lister les images des 6 éléments !).

> *Réponse* :
>
> Si A_1, A_2, A_3 sont les sommets du triangle T, l'isomorphisme souhaité est donné par $f \in \mathrm{Isom}(T) \mapsto \sigma \in S_3$, où σ est définie par $f(A_i) = A_{\sigma(i)}$.
>
> Remarque : c'est la bonne manière d'écrire l'isomorphisme, il ne faut pas donner une définition en listant toutes les images ! Vu le nombre très faible de bonnes réponses à cette question, vous pouvez vous attendre à ce que je la repose...

4. Si $H = \{\mathrm{id}, S_A\}$, donner un exemple d'élément $g \in \mathrm{Isom}(T)$ tel que les classes à gauche et à droite de g soient distinctes, c'est-à-dire $gH \neq Hg$.

> *Réponse* :
>
> Par exemple $g = S_B$ convient car
>
> $$S_B H = \{S_B, S_B \circ S_A\}, \quad H S_B = \{S_B, S_A \circ S_B\}$$
>
> et $S_B \circ S_A \neq S_A \circ S_B$ sont deux rotations d'angles opposées.
>
> Remarque : $g = S_C, R_{2\pi/3}$ ou $R_{-2\pi/3}$ convenaient aussi.