1. Donner un exemple de groupe non commutatif.

Réponse :

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients réels, en effet par exemple $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}$.

Un autre exemple était donné par le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral, ou encore par le groupe symétrique S_3, c'est à dire le groupe contenant les six bijections de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

NB: L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n n'est PAS un groupe, il est indispensable de se restreindre aux matrices inversibles !

2. Donner un exemple de groupe contenant exactement 3 éléments.

Réponse :

Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ des entiers modulo 3, muni de l'addition. En effet $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$.

Un autre exemple était donné par le groupe des rotations préservant un triangle équilatéral : $\mathrm{Isom}^+(T)=\{id, r_{2\pi/3}, r_{-2\pi/3}\}$, ou encore le groupe $U_3=\{1,e^{2i\pi/3},e^{-2i\pi/3}\}$ des racines cubiques de l'unité.

NB: le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$ est d'ordre 2, pas 3...

3. Quelle est la loi naturelle qui permet de munir l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls d'une structure de groupe ? Quel est l'ordre de i pour cette loi ? Quel est l'ordre de 2 ?

Réponse :

La multiplication permet de munir $\mathbb{C}^*$ d'une structure de groupe, et

$$\mathrm{ordre}(i)=4,\quad \mathrm{ordre}(2)=\infty.$$

4. Si R est un rectangle (non carré !), donner la liste des isométries du plan préservant ce rectangle. Cet ensemble est-il un groupe ?

Réponse :

L'ensemble en question est bien un groupe (pour la composition) : en effet on vérifie qu'il s'agit d'un sous-groupe du groupe des isométries du plan.

La liste des éléments de $\mathrm{Isom}(R)$ consiste en les 4 isométries suivantes (je note O le centre du rectangle, c'est-à-dire l'intersection des deux diagonales. Le mieux était de faire un dessin !) :

l'identité, la rotation d'angle π centrée en O (c'est la même chose que la symétrie centrale en O, ou encore que la rotation d'angle $-\pi$), et les deux symétries axiales dont les axes passent par les milieux de côtés opposés.

NB : Les symétries par rapport aux diagonales ne préservent PAS le rectangle !

le groupe diédral D_4 est un groupe différent du groupe $\mathrm{Isom}(R)$ considéré ci-dessus, il s'agit en effet du groupe d'ordre 8 des isométries préservant un carré.