Algèbre 6 (théorie des groupes)
Examen partiel

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barème sur 20 est indicatif.

I - Quizz (6 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument, ou un contre-exemple. Trois lignes devraient suffire à chaque fois, mais attention, réponse correcte mais non justifiée = 0 point !

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, commutatif et non cyclique : vrai ou faux ?
2. Il existe deux groupes d'ordre 4 non isomorphes : vrai ou faux ?
3. Il existe exactement quatre éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{Isom}(R)$ des isométries du plan préservant un rectangle (non carré) R : vrai ou faux ?
4. Tous les sous-groupes du groupe symétrique S_3 sont distingués : vrai ou faux ?
5. Tout groupe G dont tous les éléments (à part le neutre) sont d'ordre 2 est abélien : vrai ou faux ?
6. Le groupe symétrique S_{10} contient au moins un élément d'ordre 30 : vrai ou faux ?

II - Groupe symétrique (6 points)

Notons σ la permutation suivante de $\{1, \ldots, 7\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Écrire la décomposition canonique en cycles de σ.
2. Calculer la signature de σ.
3. Calculer σ^{2019}.
4. Calculer le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans S_7.
5. Trouver, si c'est possible, une permutation $\omega \in S_7$ telle que
$$\omega\sigma\omega^{-1} = (1\,2)(3\,4\,5).$$

TSVP ⇒

III - Groupes et éléments d'ordre 6 (8 points)

1. Donner (sans faire la liste des images !) un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique S_3.

2. Donner la liste des éléments d'ordre 6 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.

3. Calculer l'ordre de $\bar{2}$ et de $\bar{3}$ dans le groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$, puis expliciter un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ vers le groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

4. Montrer qu'un groupe G d'ordre 6 contient forcément au moins un élément d'ordre 2.

5. Montrer que le groupe alterné A_4 ne contient aucun sous-groupe d'ordre 6.

6. Quel est le plus petit n tel que le groupe alterné A_n contienne un élément d'ordre 6 ?

7. Quel est le plus petit n tel que le groupe alterné A_n contienne un sous-groupe d'ordre 6 ?