

## Corrigé du devoir

Quelques rappels :

Soit  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  un sous-groupe fini d'ordre  $n$ . On appelle pôles de  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$  les deux points obtenus comme intersection de l'axe de  $g$  avec la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $X$  l'ensemble des pôles des éléments de  $G$ , et on considère l'action de  $G$  sur  $X$ . On a vu en cours que le nombre  $k$  d'orbites est égal à 2 ou 3. Dans le cas où  $k = 3$ , on note  $\Omega_1, \Omega_2$  et  $\Omega_3$  les orbites, et  $n_i$  les cardinaux des stabilisateurs associés; en particulier  $n_i \cdot |\Omega_i| = n$ . On résume cette situation en disant que  $G$  est de type  $n; n_1, n_2, n_3$ .

### Première partie : isométries préservant un tétraèdre régulier

Soit  $T$  un tétraèdre régulier dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire un polyèdre convexe à 4 faces qui sont chacune des triangles équilatéraux. On cherche à déterminer le groupe  $\text{Isom}^+(T) \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$  préservant ce tétraèdre. On rappelle que  $\text{Isom}(T) \subseteq \text{O}_3(\mathbb{R})$  désigne le groupe des isométries (rotations et symétries par rapport à un plan) préservant  $T$ .

1. Montrer que si  $f \in \text{Isom}(T)$  fixe trois des sommets du tétraèdre, alors  $f$  est l'identité.

*SOLUTION.* Fixons le centre  $O$  du tétraèdre comme origine de  $\mathbb{R}^3$ , ce qui permet de voir  $\text{Isom}(T)$  comme un sous-groupe du groupe linéaire  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$  (en fait c'est même un sous-groupe du groupe orthogonal  $\text{O}_3(\mathbb{R})$ , mais c'est l'aspect linéaire qui est important ici). Alors les trois sommets  $p_1, p_2, p_3$  d'une face forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , et si  $f \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  est une isométrie fixant cette base alors  $f$  est l'identité.

*NB:* Il ne suffit pas de dire que  $f$  fixe les 4 sommets du tétraèdre, pour assurer  $f = \text{id}$ . Il existe des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui fixent 4 points mais qui ne sont pas l'identité (exercice ! évidemment un tel exemple ne sera pas linéaire...)

2. En faisant agir le groupe  $\text{Isom}(T)$  sur un ensemble à 4 éléments qu'on précisera, montrer qu'il existe un morphisme injectif  $\varphi$  de  $\text{Isom}(T)$  vers  $S_4$ .

*SOLUTION.* On note  $p_1, p_2, p_3, p_4$  les 4 sommets du tétraèdre. En considérant l'action de  $\text{Isom}(T)$  sur ces 4 points, on obtient un morphisme  $\varphi: \text{Isom}(T) \rightarrow S_4$ . Précisément on pose  $\varphi(f) = \sigma$ , où la permutation  $\sigma$  est définie par  $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$ . L'isométrie  $f$  est dans  $\ker \varphi$  si  $f$  fixe les sommets  $p_i$ , par la question précédente cela implique  $f = \text{id}$ , et donc  $\varphi$  est injective.

*NB:* Il est bon d'avoir vérifié une fois dans sa vie que la formule  $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$  ci-dessus définit bien un morphisme : si  $\varphi(f) = \sigma$  et  $\varphi(f') = \sigma'$ , on a

$$(f' \circ f)(p_i) = f'(p_{\sigma(i)}) = p_{(\sigma' \circ \sigma)(i)},$$

ce qui implique

$$\varphi(f' \circ f) = \sigma' \circ \sigma = \varphi(f') \circ \varphi(f).$$

3. Montrer que toute transposition  $\tau = (ij)$  est dans l'image de  $\varphi$ . En déduire que  $\varphi$  est surjectif.

*SOLUTION.* Soit  $P$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par le milieu de  $[p_i, p_j]$  et par les deux autres sommets du tétraèdre, et soit  $f$  la symétrie orthogonale par rapport à  $P$ . Alors  $f$  échange  $p_i$  et  $p_j$  et fixe les deux autres sommets, autrement dit  $\varphi(f) = (ij)$ . Donc  $\varphi(\text{Isom}(T))$  est un sous-groupe de  $S_4$  contenant toutes les transpositions. Comme

les transpositions engendrent  $S_4$ , on en déduit que  $\varphi(\text{Isom}(T)) = S_4$ , c'est-à-dire  $\varphi$  est surjective.

NB: ici on a admis que le plan  $P$  est perpendiculaire au segment  $[p_i, p_j]$ .

4. Montrer que l'image de  $\text{Isom}^+(T)$  par  $\varphi$  contient tous les 3-cycles  $\gamma = (ijk)$ . En déduire que  $\text{Isom}^+(T)$  est isomorphe au groupe alterné  $A_4$ .

SOLUTION. Soit  $D$  la droite passant par le milieu de la face de sommets  $p_i, p_j, p_k$  et par le sommet opposé à cette face. Les rotations d'axe  $D$  et d'angle  $\pm 2\pi/3$  sont des éléments de  $\text{Isom}^+(T)$ , et sont envoyées par  $\varphi$  sur les 3-cycles  $(ijk)$  et  $(ikj)$ . On sait que  $\text{Isom}^+(T)$  est d'indice 2 dans  $\text{Isom}(T)$ , donc  $\text{Isom}^+(T)$  est d'ordre 12. Alors  $\varphi(\text{Isom}^+(T))$  est un sous-groupe d'ordre 12 de  $S_4$  contenant les 3-cycles. Comme les 3-cycles engendrent le groupe  $A_4$  d'ordre 12, on en déduit  $\varphi(\text{Isom}^+(T)) = A_4$ , et finalement  $\text{Isom}^+(T)$  est isomorphe au groupe alterné  $A_4$ .

5. Déterminer l'ensemble  $X$  des pôles, puis les orbites, ainsi que les cardinaux des stabilisateurs associés à l'action de  $G = \text{Isom}^+(T)$  sur  $X$ .

SOLUTION. On sait maintenant que  $\text{Isom}^+(T)$  admet 12 éléments, puisque

$$|\text{Isom}^+(T)| = |A_4| = 12.$$

On peut distinguer trois types d'éléments dans  $\text{Isom}^+(T)$ :

- L'identité;
- Les rotations d'angle  $\pm 2\pi/3$  que l'on a identifié à la question précédente: il y en a 8, correspondant aux 4 axes passant par un sommet  $p_i$  et le milieu de la face opposée. Chacun de ces axes définit deux pôles, qui sont les points antipodaux  $p_i$  et  $-p_i$ .
- Les rotations d'angle  $\pi$  et d'axe passant par les milieux de côtés opposés: il y en a 3, et ces trois axes donnent 6 autres pôles.

L'ensemble  $X$  des pôles est donc de cardinal  $8 + 6 = 14$ . Les pôles sont de trois types : sommets de  $T$ , milieux d'arête, milieux de faces, et comme  $\text{Isom}^+(T)$  agit transitivement respectivement sur les sommet, arêtes et faces de  $T$  (car par définition d'un polyèdre régulier il agit transitivement sur les drapeaux), on obtient que  $X$  est la réunion des 3 orbites suivantes :

- $\Omega_1$  l'ensemble des 6 milieux des arêtes de  $T$  (ou plus exactement les projections radiales de ces milieux sur la sphère unité);
- $\Omega_2$  l'ensemble des 4 sommets  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  de  $T$ ;
- $\Omega_3$  l'ensemble des 4 milieux des faces de  $T$ , ou plutôt leur projections radiales sur la sphère, c'est-à-dire les points  $\{-p_1, -p_2, -p_3, -p_4\}$ ;

Les stabilisateurs associés sont de cardinaux respectifs  $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 3$ .

## Deuxième partie : unicité du groupe de type 12; 2, 3, 3

Dans cette partie, on suppose donné un sous-groupe fini  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  de type 12; 2, 3, 3, et on cherche à montrer l'existence d'un tétraèdre régulier  $T$  tel que  $G = \text{Isom}^+(T)$ . On notera  $p_1, p_2, p_3, p_4$  les points dans l'orbite  $\Omega_2$ .

1. Montrer que  $\text{Stab}(p_i) \subseteq G$  est un groupe cyclique.

SOLUTION. Par hypothèse  $|\text{Stab}(p_i)| = n_2 = 3$ , donc  $\text{Stab}(p_i)$  est cyclique : de façon générale si  $p \in \mathbb{N}$  est premier, tout groupe d'ordre  $p$  est cyclique comme conséquence immédiate du théorème de Lagrange.

2. En considérant l'action de  $\text{Stab}(p_i)$  sur  $\Omega_2$ , montrer que pour tous  $1 \leq i < j \leq 4$ , les segments  $[p_1, p_2]$  et  $[p_i, p_j]$  sont de même longueur.

SOLUTION. Comme  $|\text{Stab}(p_i)| = 3$  chacune des orbites de l'action de  $\text{Stab}(p_i)$  sur  $\Omega_2$  est de cardinal 1 ou 3. Comme  $\Omega_2$  est de cardinal 4 et doit s'écrire comme une réunion disjointe d'orbites, on conclut qu'il y a a priori seulement deux possibilités :

- (a) ou bien 1 orbite de cardinal 3 et 1 orbite de cardinal 1;  
 (b) ou bien 4 orbites de cardinal 1;

Comme  $\text{Stab}(p_i)$  est cyclique engendré par une rotation  $r$ , il y a au plus deux points fixes pour l'action (les pôles de  $r$ ), c'est-à-dire au plus deux orbites de cardinal 1. Donc on est forcément dans la situation (a): il y a une orbite de cardinal 3  $\{p_j, p_k, p_l\}$ , et une de cardinal 1  $\{p_i\}$ . Comme  $r$  est une isométrie, on conclut que les segments  $[p_i, p_j]$ ,  $[p_i, p_k]$  et  $[p_i, p_l]$  sont tous trois de mêmes longueurs, ceci étant vrai pour tout  $p_i$ , on obtient le résultat.

3. En déduire l'existence d'un tétraèdre régulier  $T$  tel que  $G = \text{Isom}^+(T)$ .

SOLUTION. Les points  $p_1, p_2, p_3, p_4$  sont les sommets d'un tétraèdre  $T$  et sont globalement préservés par l'action de  $G$ , donc  $G \subseteq \text{Isom}^+(T)$ . Comme  $|G| = 12$  et qu'on a vu à la première partie que  $\text{Isom}^+(T)$  est isomorphe à  $A_4$  donc aussi d'ordre 12, on conclut  $G = \text{Isom}^+(T)$ .

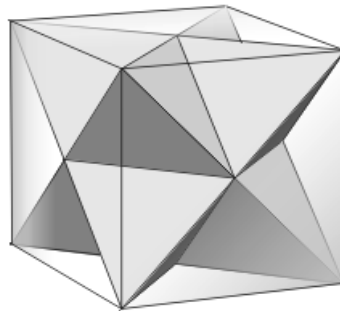
4. Soit  $O$  le centre du tétraèdre  $T$ , et  $s_O$  la symétrie centrale de centre  $O$ . Montrer que le tétraèdre  $T' = s_O(T)$  est distinct de  $T$ , et vérifie également  $G = \text{Isom}^+(T')$ .

SOLUTION. Les sommets de  $T'$  sont  $-p_1, -p_2, -p_3$  et  $-p_4$ . Le point  $-p_1$  est différent de  $p_1$  et il est sur la droite  $Op_1$  mais  $p_i$  n'est pas sur  $Op_1$  pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ . Alors  $-p_1 \neq p_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et donc  $T'$  est distinct de  $T$ .

Pour tout  $i$ , les points  $p_i$  et  $-p_i$  sont les pôles de la même rotation d'ordre 3. On a vu plus haut que  $\Omega_3$  est de cardinal 4, avec  $\Omega_3 = \{-p_1, -p_2, -p_3, -p_4\}$ . Comme  $-p_1, -p_2, -p_3$  et  $-p_4$  sont les sommets du tétraèdre régulier  $T'$  et qu'ils sont globalement préservés par l'action de  $G$ , on conclut avec les mêmes argument que dans la question précédente que  $G = \text{Isom}^+(T')$ .

5. Faire un dessin représentant les deux tétraèdres  $T$  et  $T'$ , en indiquant les éléments de  $\Omega_1, \Omega_2$  et  $\Omega_3$ .

SOLUTION. Sur le dessin ci-dessous on a dessiné les deux tétraèdres, et aussi un cube qui les contient tous deux (le cube n'était pas mentionné dans l'énoncé, mais aide à comprendre, et permet de faire le lien avec les parties suivantes)



Les 6 points de  $\Omega_1$  correspondent aux milieux des arêtes des tétraèdres, ce sont aussi les centres des 6 faces du cube (comme précédemment je fais le petit abus d'identifier les milieux des arêtes avec les pôles, alors qu'à strictement parler il faut les projeter radialement sur la sphère).

*Les 4 points de  $\Omega_2$  sont les sommets de  $T$  par hypothèse, et les 4 points de  $\Omega_3$  sont les sommets de  $T'$ .*

### Troisième partie : rotations préservant un cube

Soit  $C$  un cube dans  $\mathbb{R}^3$ . On cherche à déterminer le groupe  $\text{Isom}^+(C) \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$  préservant le cube  $C$ .

1. Supposons qu'une arête du cube soit de longueur 1. Si  $A, B$  sont deux sommets distincts du cube, quelles sont les longueurs possibles pour le segment  $[A, B]$  ?

SOLUTION. *Trois longueurs possibles :*

- 1, correspondant à deux sommets reliés par une arête du cube;
- $\sqrt{2}$ , correspondant à deux sommets reliés par la diagonale d'une face du cube;
- $\sqrt{3}$ , correspondant à deux sommets reliés par une grande diagonale du cube.

2. Combien de paires de sommets réalisent le maximum dans la question précédente ?

SOLUTION. *4 paires de sommets, correspondant aux 4 grandes diagonales du cube.*

3. En faisant agir le groupe  $\text{Isom}^+(C)$  sur un ensemble à 4 éléments qu'on précisera, montrer qu'il existe un morphisme injectif  $\Psi$  de  $\text{Isom}^+(C)$  vers  $S_4$ .

SOLUTION. *On note  $D_1, D_2, D_3, D_4$  les 4 grandes diagonales du cube. En considérant l'action de  $\text{Isom}^+(C)$  sur ces diagonales, on obtient un morphisme  $\varphi: \text{Isom}^+(C) \rightarrow S_4$ . Précisément on pose  $\varphi(f) = \sigma$ , où la permutation  $\sigma$  est définie par  $f(D_i) = D_{\sigma(i)}$ .*

*Soit  $f$  une isométrie dans  $\ker \varphi$ , autrement dit  $f$  fixe chacune des diagonales. Notons  $p_i, p_j$  deux sommets reliés par une arête, et  $D_i = [p_i, p'_i]$ ,  $D_j = [p_j, p'_j]$  les diagonales passant par ces points. Comme  $[p_i, p'_i]$  et  $[p_j, p'_j]$  sont de longueur  $\sqrt{3}$ , et que  $[p_i, p_j]$  et  $[p'_i, p'_j]$  sont de longueur 1, on a seulement deux cas possibles : ou bien  $f$  fixe les 4 points, ou bien  $f$  échange  $p_i$  et  $p'_i$ , et également  $p_j$  et  $p'_j$ . Ceci étant vrai pour toute arête  $[p_i, p_j]$ , on obtient :*

- ou bien  $f$  fixe les 8 sommets du cube, et alors  $f$  est l'identité.
- ou bien  $f$  échange chacune des 4 paires de points  $p_i, p'_i$  associés aux grandes diagonales, mais alors en notant  $s$  la symétrie centrale centrée en le centre du cube, on aurait  $s \circ f = \text{id}$ , ce qui contredirait  $f \in \text{Isom}^+(C)$  (car  $s$  ne préserve pas l'orientation de  $\mathbb{R}^3$  !).

*On conclut que  $\varphi$  est injective.*

4. Montrer que toute transposition  $\tau = (ij)$  est dans l'image de  $\Psi$ . En déduire que  $\Psi$  est surjectif.

SOLUTION. *Avec les notations précédentes, soit  $D$  la droite passant par les milieux des arêtes  $[p_i, p_j]$  et  $[p'_i, p'_j]$ . Alors la rotation  $f$  d'axe  $D$  et d'angle  $\pi$  est un élément de  $\text{Isom}^+(C)$  qui échange  $D_i$  et  $D_j$  et fixe les deux autres diagonales, autrement dit  $\varphi(f) = (ij)$ .*

*Comme les transpositions engendrent  $S_4$ , on en déduit que  $\Psi$  est surjective, et donc finalement  $\text{Isom}^+(C)$  est isomorphe à  $S_4$ , et en particulier compte 24 éléments.*

5. Déterminer l'ensemble  $X$  des pôles, puis les orbites, ainsi que les cardinaux des stabilisateurs associés à l'action de  $G = \text{Isom}^+(C)$  sur  $X$ .

SOLUTION. *Les 24 éléments de  $\text{Isom}^+(C)$  se répartissent comme suit:*

- L'identité;
- 6 rotations d'angle  $\pi$  et d'axe passant par des milieux d'arêtes opposés

- 8 rotations d'angle  $\pm 2\pi/3$ , d'axe l'une des 4 grandes diagonales;
- 6 rotations d'angle  $\pm\pi/2$ , et 3 rotations d'angle  $\pi$ , d'axe passant par des milieux de faces opposées.

On peut noter au passage que l'isomorphisme  $\Psi$  envoie respectivement ces rotations sur:

- L'identité;
- 6 transpositions  $(ij)$ ;
- 8 3-cycles  $(ijk)$ ;
- 6 4-cycles  $(ijkl)$  et 3 double-transpositions  $(ij)(kl)$ .

L'ensemble des pôles  $X$ , de cardinal 26, est la réunion des 3 orbites suivantes :

- $\Omega_1$  l'ensemble des 12 milieux des arêtes de  $C$ ;
- $\Omega_2$  l'ensemble des 8 sommets de  $C$ ;
- $\Omega_3$  l'ensemble des 6 milieux des faces de  $C$ ;

Les stabilisateurs associés sont de cardinaux respectifs  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 4$ .

#### Quatrième partie : unicité du groupe de type 24; 2, 3, 4

Dans cette partie, on suppose donné un sous-groupe fini  $G \subseteq \text{SO}_3(\mathbb{R})$  de type 24; 2, 3, 4, et on cherche à montrer l'existence d'un cube  $C$  tel que  $G = \text{Isom}^+(C)$ . Les questions dans cette partie sont un peu moins détaillées, il faut s'inspirer des idées et parfois des résultats des parties précédentes.

1. Montrer que si  $p \in \Omega_2$  est un pôle dans l'orbite de cardinal 8, alors le pôle antipodal  $-p$  est aussi dans  $\Omega_2$ .

SOLUTION. Si  $-p$  n'était pas dans la même orbite que  $p$ , alors l'orbite de  $-p$  serait une autre orbite de cardinal 8, absurde.

2. En utilisant l'action sur les paires de pôles antipodaux dans  $\Omega_2$ , montrer qu'il existe un isomorphisme  $\varphi: G \rightarrow S_4$ .

SOLUTION. On note  $P_i = \{p_i, -p_i\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  les paires de points antipodaux dans  $\Omega_2$ . En considérant l'action de  $G$  sur ces paires  $P_i$ , on obtient un morphisme  $\varphi: G \rightarrow S_4$ . Précisément on pose  $\varphi(g) = \sigma$ , où la permutation  $\sigma$  est définie par  $g(P_i) = P_{\sigma(i)}$ .

On va montrer que  $\varphi$  est injectif. Soit  $g \in \ker \varphi$ .

Supposons que  $g \neq \text{id}$ . Si  $g(p) = p$  pour un  $p$  dans  $\Omega_2$ , alors  $g$  est une rotation d'angle  $2\pi/3$  et donc  $g$  ne stabilise pas d'autres paires de points antipodaux que  $\{p, -p\}$ , ce qui est impossible. Donc pour tout  $p \in \Omega_2$  on a  $g(p) = -p$  et on en déduit que  $g$  est une symétrie centrale ce qui contredit  $g \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

Donc  $g = \text{id}$  et  $\varphi$  est un morphisme injectif. Comme  $|G| = 24 = |S_4|$ , on conclut que  $\varphi$  est un isomorphisme.

3. Montrer que  $\Omega_2$  est égal à l'ensemble des pôles des éléments de  $G$  d'ordre 3.

SOLUTION. Soit  $E$  l'ensemble des pôles des éléments de  $G$  d'ordre 3. On va montrer que  $\Omega_2 = E$ .

Soit  $p \in \Omega_2$ . Par hypothèse  $|\text{Stab}(p)| = n_2 = 3$ , donc  $\text{Stab}(p)$  est cyclique d'ordre 3. Alors il existe un élément  $g \in \text{Stab}(p)$  d'ordre 3. Donc  $p$  est un pôle de l'élément  $g$  d'ordre 3. D'où  $\Omega_2 \subseteq E$ .

Soit  $p \in E$ , c'est à dire qu'il existe un élément  $g \in G$  d'ordre 3 tel que  $g(p) = p$ . Alors  $g$  est dans  $\text{Stab}(p)$  et donc 3 divise  $|\text{Stab}(p)|$ . Par hypothèse les seules possibilités pour  $|\text{Stab}(p)|$  sont 2, 3 et 4 et donc  $|\text{Stab}(p)| = n_2 = 3$ . D'où  $E \subseteq \Omega_2$ .

4. Notons  $H \subset G$  le sous-groupe engendré par les éléments d'ordre 3. Montrer que  $H$  est un groupe de type 12; 2, 3, 3.

SOLUTION. L'isomorphisme  $\varphi : G \rightarrow S_4$  envoie les éléments d'ordre 3 de  $G$  sur les éléments d'ordre 3 de  $S_4$ . Donc  $H$  est isomorphe au sous-groupe de  $S_4$  engendré par les 3-cycles, c'est-à-dire  $H$  est isomorphe à  $A_4$ . En particulier,  $H$  est d'ordre 12 et à part l'identité,  $H$  a 3 éléments d'ordre 2 et 8 éléments d'ordre 3.

Par la question précédente, l'ensemble des pôles des éléments de  $H$  d'ordre 3 est égal à  $\Omega_2$  et donc de cardinal 8. Par la formule des classes pour l'action de  $H$  sur l'ensemble de ses pôles,  $|H| = |\text{Orb}(p)| |\text{Stab}(p)|$ , on en déduit qu'une orbite de pôles d'éléments d'ordre 3 est de cardinal 4. Donc il y a 2 orbites de pôles dont les stabilisateurs sont d'ordre 3.

Deux éléments d'ordre 2 de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  qui ont le même axe coïncident. Vu que  $H$  contient 3 éléments distincts d'ordre 2, on en déduit qu'ils ont 3 axes distincts et donc 6 pôles et que le stabilisateur de chaque pôle est d'ordre 2.

Donc  $H$  est un groupe de type 12; 2, 3, 3.

5. Montrer que les points de  $\Omega_2$  sont les sommets d'un cube et conclure.

SOLUTION. Par la troisième partie  $H = \text{Isom}^+(T)$  pour un tétraèdre régulier  $T$  et aussi  $H = \text{Isom}^+(T')$  pour  $T' = s_O(T)$ . Donc  $\Omega_2$  est l'union des sommets de  $T$  et  $T'$ .

Pour voir que les points de  $\Omega_2$  sont les sommets d'un cube voir le dessin de la question 5 de la troisième partie. Justification supplémentaire:

Soient  $a$  et  $b$  deux arêtes opposées de  $T$  et  $a'$  et  $b'$  leurs arêtes symétriques de  $T'$ . Le milieu de  $b$  est envoyé par  $s_O$  sur le milieu de  $a$ . Donc  $a$  et  $b'$  sont deux segments qui se coupent en leur milieu. De plus  $a$  et  $b'$  sont de la même longueur et sont perpendiculaires car  $a$  est perpendiculaire au plan passant par  $b$  et le centre du  $T$ . Donc  $a$  et  $b'$  sont les diagonales d'un carré et  $a'$  et  $b$  sont les diagonales d'un carré parallèle au premier. Les 2 autres paires d'arêtes opposées de  $T$  donnent les autres 4 faces du cube de sommets  $\Omega_2$ .

Alors  $G$  préserve globalement les sommets d'un cube  $C$  et donc  $G \subseteq \text{Isom}^+(C)$ . Comme  $|G| = 24$  et qu'on a vu à la deuxième partie que  $\text{Isom}^+(C)$  est isomorphe à  $S_4$  donc aussi d'ordre 24, on conclut  $G = \text{Isom}^+(C)$ .

### Cinquième partie : récréation

Il existe encore un autre sous-groupe fini exceptionnel dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ , de type 60; 2, 3, 5, associé à l'icosaèdre (dé à 20 faces). Plutôt que de l'étudier sur le même modèle que le tétraèdre et le cube, je vous propose de regarder la série de vidéos suivante, qui vous apprendra plein de choses sur les polyèdres réguliers, en dimension 3... et même 4 !

<http://www.dimensions-math.org>