Devoir Maison

à rendre par email au plus tard le dimanche 29 *mars. Si vous manquez de temps traitez seulement une partie du devoir, mais traitez les parties dans l'ordre.*

Quelques rappels :

Soit $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe fini d'ordre n. On appelle pôles de $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ les deux points obtenus comme intersection de l'axe de G avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On note X l'ensemble des pôles des éléments de G, et on considère l'action de G sur X. On a vu en cours que le nombre k d'orbites est égal à 2 ou 3. Dans le cas où $k = 3$, on note Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les orbites, et $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ les cardinaux des stabilisateurs associés; en particulier $n_i \cdot |\Omega_i| = n$. On résume cette situation en disant que G est de type $n; n_1, n_2, n_3$.

Première partie : isométries préservant un tétraèdre régulier

Soit T un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un polyèdre convexe à 4 faces qui sont chacune des triangles équilatéraux. On cherche à déterminer le groupe $\mathrm{Isom}^+(T) \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant ce tétraèdre. On rappelle que $\mathrm{Isom}(T) \subseteq \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ désigne le groupe des isométries (rotations et symétries par rapport à un plan) préservant T.

1. Montrer que si $f \in \mathrm{Isom}(T)$ fixe trois des sommets du tétraèdre, alors f est l'identité.

2. En faisant agir le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ sur un ensemble à 4 éléments qu'on précisera, montrer qu'il existe un morphisme injectif φ de $\mathrm{Isom}(T)$ vers S_4.

3. Montrer que toute transposition $\tau = (i\,j)$ est dans l'image de φ. En déduire que φ est surjectif.

4. Montrer que l'image de $\mathrm{Isom}^+(T)$ par φ contient tous les 3-cycles $\gamma = (i\,j\,k)$. En déduire que $\mathrm{Isom}^+(T)$ est isomorphe au groupe alterné A_4.

5. Déterminer l'ensemble X des pôles, puis les orbites, ainsi que les cardinaux des stabilisateurs associés à l'action de $G = \mathrm{Isom}^+(T)$ sur X.

Deuxième partie : unicité du groupe de type $12; 2, 3, 3$

Dans cette partie, on suppose donné un sous-groupe fini $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ de type $12; 2, 3, 3$, et on cherche à montrer l'existence d'un tétraèdre régulier T tel que $G = \mathrm{Isom}^+(T)$. On notera p_1, p_2, p_3, p_4 les points dans l'orbite Ω_2.

1. Montrer que $\mathrm{Stab}(p_i) \subseteq G$ est un groupe cyclique.

2. En considérant l'action de $\mathrm{Stab}(p_i)$ sur Ω_2, montrer que pour tous $1 \leq i < j \leq 4$, les segments $[p_1, p_2]$ et $[p_i, p_j]$ sont de même longueur.

3. En déduire l'existence d'un tétraèdre régulier T tel que $G = \mathrm{Isom}^+(T)$.

4. Soit O le centre du tétraèdre T, et s_O la symétrie centrale de centre O. Montrer que le tétraèdre $T' = s_O(T)$ est distinct de T, et vérifie également $G = \mathrm{Isom}^+(T')$.

5. Faire un dessin représentant les deux tétraèdres T et T', en indiquant les éléments de Ω_1, Ω_2 et Ω_3.

TSVP $\Longrightarrow$

Troisième partie : rotations préservant un cube

Soit C un cube dans $\mathbb{R}^3$. On cherche à déterminer le groupe $\mathrm{Isom}^+(C) \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant le cube C.

1. Supposons qu'une arête du cube soit de longueur 1. Si A, B sont deux sommets distincts du cube, quelles sont les longueurs possibles pour le segment $[A, B]$?

2. Combien de paires de sommets réalisent le maximum dans la question précédente ?

3. En faisant agir le groupe $\mathrm{Isom}^+(C)$ sur un ensemble à 4 éléments qu'on précisera, montrer qu'il existe un morphisme injectif Ψ de $\mathrm{Isom}^+(C)$ vers S_4.

4. Montrer que toute transposition $\tau = (i\,j)$ est dans l'image de Ψ. En déduire que Ψ est surjectif.

5. Déterminer l'ensemble X des pôles, puis les orbites, ainsi que les cardinaux des stabilisateurs associés à l'action de $G = \mathrm{Isom}^+(C)$ sur X.

Quatrième partie : unicité du groupe de type $24;\, 2, 3, 4$

Dans cette partie, on suppose donné un sous-groupe fini $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ de type $24;\, 2, 3, 4$, et on cherche à montrer l'existence d'un cube C tel que $G = \mathrm{Isom}^+(C)$. Les questions dans cette partie sont un peu moins détaillées, il faut s'inspirer des idées et parfois des résultats des parties précédentes.

1. Montrer que si $p \in \Omega_2$ est un pôle dans l'orbite de cardinal 8, alors le pôle antipodal $-p$ est aussi dans Ω_2.

2. En utilisant l'action sur les paires de pôles antipodaux dans Ω_2, montrer qu'il existe un isomorphisme $\varphi\colon G \to S_4$.

3. Montrer que Ω_2 est égal à l'ensemble des pôles des éléments de G d'ordre 3.

4. Notons $H \subset G$ le sous-groupe engendré par les éléments d'ordre 3. Montrer que H est un groupe de type $12;\, 2, 3, 3$.

5. Montrer que les points de Ω_2 sont les sommets d'un cube et conclure.

Cinquième partie : récréation

Il existe encore un autre sous-groupe fini exceptionnel dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, de type $60;\, 2, 3, 5$, associé à l'icosaèdre (dé à 20 faces). Plutôt que de l'étudier sur le même modèle que le tétraèdre et le cube, je vous propose de regarder la série de vidéos suivante, qui vous apprendra plein de choses sur les polyèdres réguliers, en dimension 3... et même 4 !

http://www.dimensions-math.org