UPS, L2 Parcours spécial, Théorie des Groupes

FEUILLE 4

Exercice 1. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que si H et $G\backslash H$ sont des p-groupes, il en est de même de G.

Exercice 2. Soit G un p-groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $H\backslash Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre $2p$, où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que G contient un unique sous-groupe H d'ordre p et que ce sous-groupe est distingué.

Exercice 4. Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 5. Pour p un nombre premier, déterminer le nombre de p-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_p.

Exercice 6. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq. Montrer que G admet un unique q-Sylow Q qui est distingué et que $G = QP$, où P est un p-Sylow de G. Montrer que G est isomorphe au produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre q par un groupe cyclique d'ordre p. Montrer que si $q-1$ n'est pas divisible par p, ce produit semi-direct est en fait un produit direct.

Exercice 7. Donner la liste des groupes d'ordre au plus 15.

Exercice 8. Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

a) Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$.
Montrer que $|X| \equiv |X^G| \pmod p$.
Indication : écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.

b) Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit.)

Exercice 9. On se propose de démontrer le résultat suivant, attribué à Cauchy (1789-1857) :

Soit G un groupe commutatif fini, et p un diviseur premier de l'ordre de G. Alors G contient un élément d'ordre p.

a) Si $G = \{g_1, \cdots, g_d\}$ avec $\text{ordre}(g_i) = n_i$, on pose $H = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\varphi : H \to G$.

b) En déduire qu'il existe un élément de G dont l'ordre est un multiple de p et conclure.

Exercice 10. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 72 à isomorphisme près, en justifiant que votre liste est complète et non redondante.