UPS, L2 Parcours spécial, Théorie des Groupes

FEUILLE 3

Rappel : Sous-groupe normal (ou distingué)
On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est normal (ou distingué) si pour tout $x \in G$ on a $xH = Hx$.

Exercice 1.

a) Montrer que le sous-groupe $H = \{id, (12)\} \subset S_3$ n'est pas distingué, et expliciter les classes à droite et à gauche modulo H.

b) Trouver tous les sous-groupes distingués du groupe symétrique S_3.

c) Montrer que la loi de composition sur S_3 n'induit pas une loi de groupe sur les classes à gauche modulo H.

Exercice 2. On considère le sous-groupe H de S_5 engendré par (12) et (13).

a) Le sous-groupe H est-il distingué dans S_5 ?

b) Déterminer le nombre de classes à droite modulo H.

Exercice 3. Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'indice 2 est toujours distingué.

Exercice 4. Montrer que tous les sous-groupes du groupe quaternionique $\mathbb{H}^8$ sont normaux dans $\mathbb{H}^8$.

Exercice 5.

a) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$ on a $a^n \in G$.

b) Donner un exemple de sous-groupe non distingué de G pour lequel la conclusion précédente est fausse.

c) Soit G un sous-groupe d'indice fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Montrer que $G = \mathbb{C}^*$.

Rappel : Quotient
Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble des classes (à droite ou à gauche) de G modulo H forme un groupe G/H appelé groupe quotient de G par H.

Exercice 6.

a) Montrer que le cercle unité $U \in \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

b) Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

c) Montrer que la loi $+$ sur $\mathbb{R}$ permet de munir le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe.

d) Montrer que le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(U, .)$.

e) Montrer que la loi . sur $\mathbb{R}$ n'induit pas une loi sur le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit G le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, on note $[q]$ la classe de q modulo $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $[\frac{35}{6}] = [\frac{5}{6}]$ et déterminer l'ordre de $[\frac{35}{6}]$.

b) Montrer que si $x \in G$ il existe un unique $\alpha \in [0, 1[$ tel que $x = [\alpha]$.

c) Montrer que tout élément de G est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

Exercice 8. Montrer que le groupe quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soient G le groupe produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et H le sous-groupe de G engendré par $(\bar{3}, \bar{2})$. Écrire la décomposition de G suivant les classes à gauche modulo H. Décrire le groupe quotient G/H.

Exercice 10. Soit G un groupe et $Z(G) = \{h \in G \mid gh = hg \ \forall g \in G\}$.

a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

b) Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est abélien. Que peut-on en déduire sur $G/Z(G)$?

Exercice 11. Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G. Montrer que

$$card(HK) = card(KH) = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

Exercice 12.

a) Donner un exemple de groupe contenant au moins deux sous-groupes d'indice 2.

b) Soit H un sous-groupe d'indice 2 de S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma^2 \in H$. En déduire que H contient l'ensemble des 3-cycles et donc que $H = A_n$.

c) Pour un groupe G, on pose $D(G)$ le sous groupe de G engendré par les commutateurs $\{\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau, \forall \sigma, \tau \in G\}$. Montrer que pour $n \geq 5$, $D(A_n) = D(S_n) = A_n$.

d) Déterminer tous les sous-groupes distingués de S_3, S_4, A_3 et A_4.

Exercice 13. Soit G un groupe. On fait opérer G sur l'ensemble de ses sous-groupes par automorphisme intérieur. C'est-à-dire que pour un sous-groupe H de G et un élément g de G, on pose :

$$g \cdot H = gHg^{-1}.$$

Le stabilisateur de H sous cette action est défini par :

$$N_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot H = H\}.$$

On l'appelle le normalisateur de H dans G.

a) Quel est le normalisateur d'un sous-groupe distingué ? Est-ce une caractérisation des sous-groupes distingués ?

b) Vérifier que H est distingué dans son normalisateur.

c) Dans le groupe S_4, trouver le normalisateur du sous-groupe à 2 éléments $\langle (12)(34) \rangle$.

d) Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est normal.

Rappel : Passage au quotient
Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, il existe un unique morphisme injectif $\bar{f} : G/Ker(f) \to G'$ tel que $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$.

Exercice 14.

a) Soit H le sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ constitué des polynômes $P(X)$ vérifiant $P(\bar{1}) = P(\bar{2}) = 0$. Montrer que H est un sous-groupe (additif) et donner le nombre d'éléments dans le quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/H$.

b) On note (X^2+1) le sous-groupe de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme $(X^2+1)Q(X)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 15. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Rappel : Produit sémi-direct
Un groupe G est produit semi-direct interne d'un sous-groupe distingué H par un sous-groupe K si $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$.

Exercice 16. Montrer que S_3 et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont tous deux produits semi-directs d'un groupe d'ordre 3 par un groupe d'ordre 2.

Exercice 17. Trouvez une structure de produit semi-direct pour les groupes suivants :

a) Le groupe diédral D_n (isométries préservant un polygone régulier à n côtés) ;

b) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$;

c) Le groupe symétrique S_n ;

d) Le groupe des isométries du plan ;

e) Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

Exercice 18.

a) Montrer que le groupe des quaternions $\mathbb{H}^8$ n'est pas un produit semi-direct.

b) Montrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un produit semi-direct.

c) Montrer que les groupes (tous de cardinal 8) $\mathbb{H}^8$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et D_4 sont 2 à 2 non isomorphes.

Exercice 19. Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué (Indication : considérer le morphisme de groupe $G \to S_p$ provenant de l'action de G sur les classes à gauche G/H).