HIERARCHIE D'UN CHANTIER

Théorie des graphes : notions de base

I- Matrice booléenne

		Extrémité									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Origine	A	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
	B	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	D	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	E	1*	1	1	1	0	0	0	1	0	0
	F	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	G	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	H	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	J	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

* Ce « 1 » signifie que *E* peut donner des ordres à *A*.

2- On obtient aisément, à partir de la matrice booléenne ci-dessus, le dictionnaire des précédents, que l'on peut ensuite utiliser pour déterminer le niveau de chacune des dix personnes.

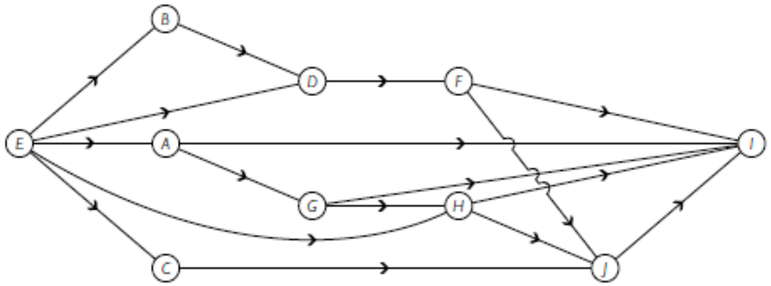
Personnes	Précédents
A	E
B	E
C	E
D	B, E
E	–
F	D
G	A
H	E, G
I	A, F, G, H, J
J	C, H, F

Niveau 0 : *E* [1]
Niveau 1 : *A, B, C* [2]
Niveau 2 : *D, G*
Niveau 3 : *F, H*
Niveau 4 : *J*
Niveau 5 : *I*

[1] Les sommets de niveau 0 sont, par définition, ceux qui n'ont pas de précédent.
[2] Les sommets de niveau 1 sont, par définition, ceux qui, dans le sous-graphe obtenu en supprimant les sommets de niveau 0 (ici *E* seulement) n'ont plus de précédent.

On procède de manière analogue pour les niveaux suivants.

On peut alors dessiner la représentation ordonnancée par niveaux suivante :



Cette représentation, dans laquelle les flèches sont toutes orientées de gauche à droite, présente indéniablement une **meilleure lisibilité** que la représentation sagittale donnée dans l'énoncé.

Parmi ces dix personnes, seul *E* ne peut recevoir aucun ordre. **C'est donc *E* qui a la plus haute position hiérarchique**.

3- On complète aisément le tableau ci-dessous à partir de la représentation obtenue à la question précédente.

Sommet X (personne)	Chemin le plus long de E à X	Longueur* du chemin le plus long de E à X	Niveau du sommet X
A	E-A	1	1
B	E-B	1	1
C	E-C	1	1
D	E-B-D	2	2
E	–	0	0
F	E-B-D-F	3	3
G	E-A-G	2	2
H	E-A-G-H	3	3
I	E-A-G-H-J-I	5	5
J	E-A-G-H-J	4	4

* Le graphe étudié ici n'est pas un graphe valué. La longueur d'un chemin est donc simplement le nombre d'arcs qui le composent.

On obtient exactement les mêmes chiffres dans les deux dernières colonnes :
le niveau d'un sommet *X* est égal au nombre maximal d'arcs permettant de joindre un sommet de niveau 0 au sommet *X*.

PROBLEME DE CIRCULATION

Algorithme de Ford Fulkerson

Partant du flot nul, qui respecte évidemment les contraintes de capacité et de conservation du flot, on cherche d'abord un flot complet en saturant tous les chemins.

On procède aussi méthodiquement que possible, par exemple comme indiqué sur les figures successives suivantes.

• **Première étape** : sur le chemin ($E \to 1 \to 4 \to 7 \to S$), on peut faire passer 10 unités (la plus petite des capacités de ces arcs) :

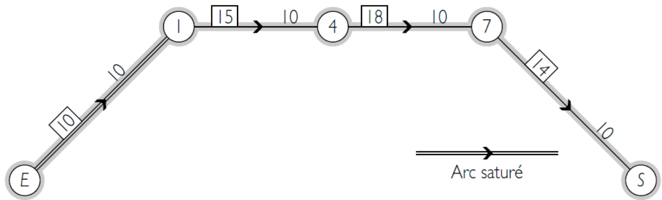


Figure 1

• **Deuxième étape** : sur le chemin ($E \to 2 \to 1 \to 4 \to 7 \to S$), on peut ajouter 4 unités, ce qui sature ($7 \to S$) :

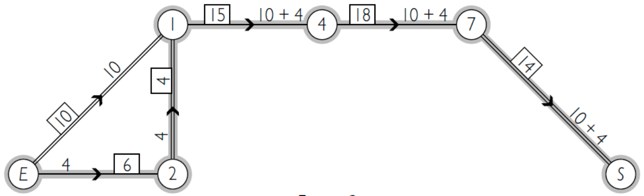


Figure 2

Remarquons que sur les chemins ($E \to 2 \to 5 \to 4 \to 7 \to S$) et ($E \to 2 \to 5 \to 8 \to 7 \to S$), on ne peut rien ajouter puisque l'arc ($7 \to S$) est maintenant saturé.

• **Troisième étape** : sur le chemin ($E \to 2 \to 5 \to 8 \to S$), on peut ajouter 2 unités :

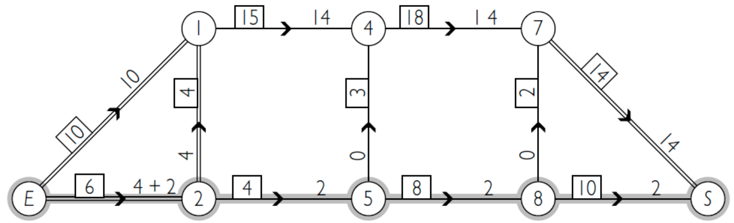


Figure 3

• **Quatrième étape** : sur le chemin ($E \to 3 \to 2 \to 5 \to 8 \to S$), on peut ajouter 2 unités :

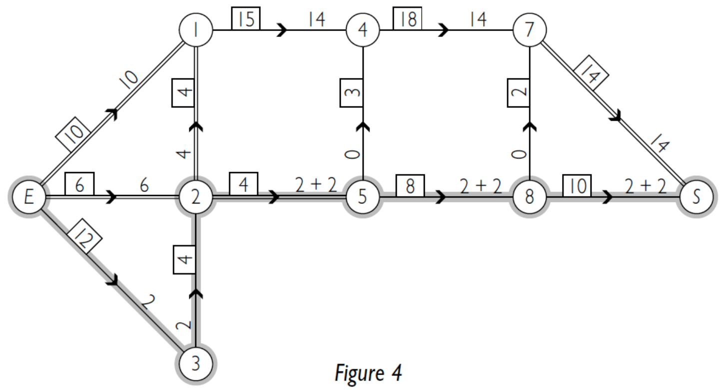


Figure 4

• **Cinquième étape** : sur le chemin ($E \to 3 \to 6 \to 5 \to 8 \to S$), on peut ajouter 4 unités :

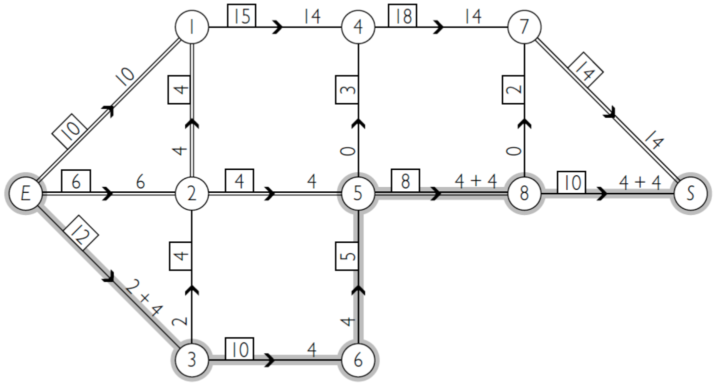


Figure 5

• **Sixième étape** : sur le chemin ($E \to 3 \to 6 \to 9 \to 8 \to S$), on peut ajouter 2 unités :

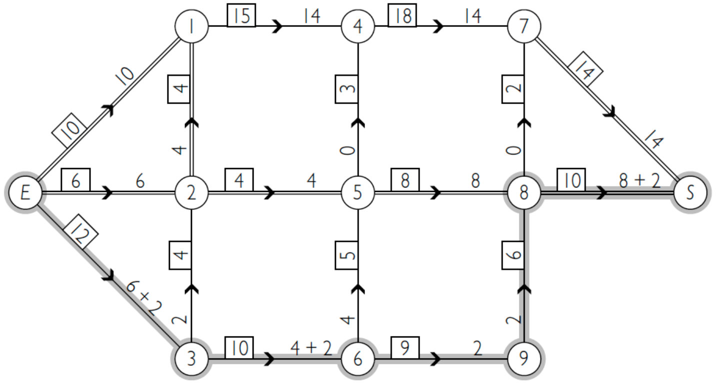


Figure 6

• **Septième étape** : sur le chemin ($E \to 3 \to 6 \to 9 \to S$), on peut ajouter 4 unités :

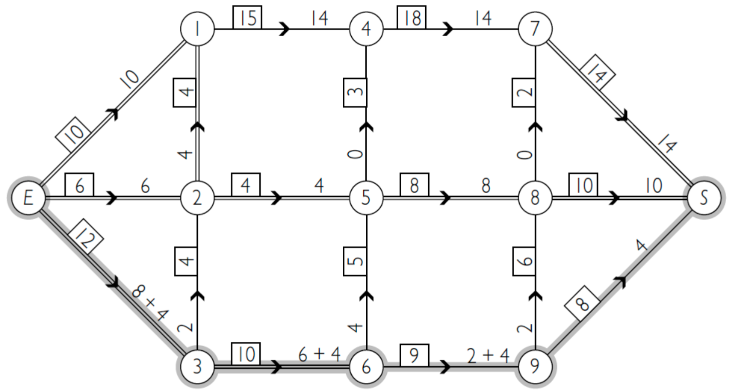


Figure 7

On constate que le flot réel complet ainsi obtenu est le flot maximal puisque les trois arcs partant de E sont saturés.

Remarques :

- le procédé utilisé ne donnera pas forcément le flot maximal directement ;
- le flot maximal peut circuler de différentes manières dans le réseau. Par exemple, le flot réel suivant correspond également au flot maximal.

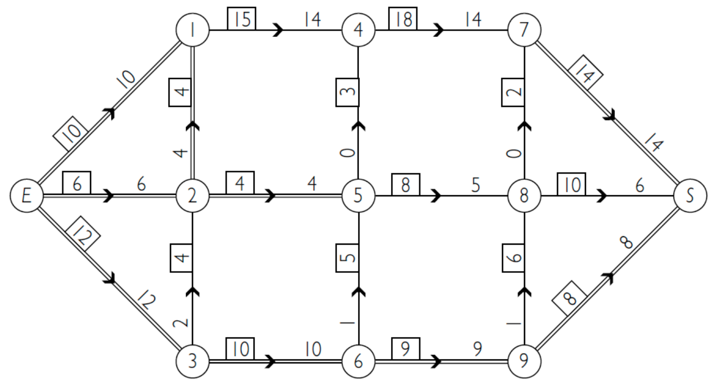


Figure 8

Conclusion : au maximum, on peut faire circuler **28** unités de E à S.