La gestion des stocks

Ian Schindler

25 septembre 2018

1 Introduction

Définition 1. *Les* stocks *d'une entreprise sont la quantité de consomables nécessairent au fonctionnement de l'entreprise disponible sur place.*

Les types de stocks sont :
— la matière première,
— les produits en cours de fabrication,
— les produits manufacturés,
— les produits défectueux.

1.1 Le rôle des stocks

— Ils permettent aux gens de travailler.
— La spéculation.

1.2 Les coûts des stocks

1. Les coûts de gestion des commandes c_g.
   — Les charges de service des achats.
   — Les transports, la manutention.
   Une fonction monotone croissante des nombres de commandes, donc décroissante en fonction de la quantité moyenne commandée :
   $$Q_{\text{Totale}} = N\bar{Q}_c \tag{1}$$
   où Q_{Totale} est la quantité totale commandée, N est le nombre de commande et $\bar{Q}_c$ est la quantité moyenne commandée à chaque commande.
2. Les coûts de possession des stocks c_p.
   — Les frais financiers : emprunt, assurance, etc.
   — Les charges de magasinage : location d'entrepôts, dépréciation.
   Une fonction croissante de la quantité commandée.
3. Coûts de rupture de stock c_r.

— Perte de vente. Exemple : magasin en rupture de stock d'un produit.
— Chomage technique de l'entreprise. Exemple : pièce clé dans la production de beaucoup de produits de l'entreprise.

Détermine le seuil en dessous duquel on lance une commande.

Autre considérations :

1. Les réductions liées à la quantité : une grande quantité commandée peut coûter moins chers.
2. La spéculation. Les prix peuvent changer.
3. La dépréciation. Les stocks peuvent perdre de la valeur si stockés trop longtemps. Exemples : la nourriture, la saison change (habilles, sport de saison), le vol, un changement de technologie (obsolescence).

Si les quantités commandées sont trop petites, le nombre de commandes est grand donc c_g risque d'être élevés. Si les quantités commandées sont trop importantes, le nombre de commande est petit, mais c_p risque d'être élevé.

Les ventes sur Internet : c_g peut-être automatisé donc c_g et c_r sont souvent très faible et des firmes travaille avec zéro stock : JAT = juste à temps.

Autres facteurs :

1. La spéculation. Si on croît que les prix vont augmenter, on pourrait augmenter la quantité commandée.
2. Une quantité invendue. Dans certains cas on est obligé de vendre son stock avant une date prédéterminée.

2 Modèles mathématiques

Les modèles mathématiques familiarise avec le problématique mais leurs hypothèses sont vérifiées très rarement. Comme disait George Box, tout modèle est faux, mais il y en a qui sont utiles. Dans un cas particulier, l'expérience et les données sont capitales. On modifiera les modèles en fonction de celles-ci.

2.1 Modèle de Wilson (1913)

Soient :

$$S(t) \overset{\text{def}}{=} \text{stock} \tag{2}$$
$$Q(t) \overset{\text{def}}{=} \text{quantite commandee,} \tag{3}$$
$$D \overset{\text{def}}{=} \text{demande totale,} \tag{4}$$
$$N \overset{\text{def}}{=} \text{N}^o\text{commandes,} \tag{5}$$
$$T(t) \overset{\text{def}}{=} \text{temps entre commandes,} \tag{6}$$
$$\theta \overset{\text{def}}{=} \text{temps total.} \tag{7}$$

Hypothèses :

(H1) D est connue.

(H2) 1. La consommation des stocks est constante.

2. $T = \text{cnst}$, $Q = \text{cnst}$.

(H3) $c_p = k_2 \bar{S}(t)$, $k_2 > 0$. En général, $\bar{S}(t)$ est exprimé en devise.

(H4) $c_g = k_1 N$ où $k_1 > 0$.

Proposition 1. *Supposons (H1)–(H4), alors :*

1. On a

$$N = \theta/T = D/Q. \tag{8}$$

2. On peut supposer que $c_r = 0$. De plus, on peut supposer que :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -Q/T + Q\delta(t - nT) \tag{9}$$

où $n \in \mathbb{N}$. En intégrant, on obtient pour $t \in [0, T]$:

$$S(t) = Q - Qt/T$$

et pour $t \in [nT, (n+1)T]$

$$S(t) = Q - Q(t - nT)/T.$$

3. $c_p = k_2 \frac{Q}{2}$.

4. On a

$$C(Q) = k_1 D/Q + k_2 \frac{Q}{2}. \tag{10}$$

Démonstration. 1. Hypothèse (H2) implique que $\theta = \sum_k T_k = NT$ et $D = \sum_k Q_k = NQ$ d'où (8).

2. Une conséquence de (H2) et (H1).

3. De (H2) on déduit

$$\begin{aligned}
\bar{S}(t) &= 1/T \int_{nT}^{(n+1)T} S(t)\mathrm{d}t \\
&= 1/T \int_{nT}^{(n+1)T} (Q - Q(t - nT)/T)\mathrm{d}t \\
&= 1/T \int_{0}^{T} (Q - Qs/T)\mathrm{d}s \\
&= 1/T [Qs - Qs^2/2T]_0^T = Q/2.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
C &= c_g + c_p + c_r \\
&= k_1 N(Q) + k_2 Q + 0 \\
C(Q) &= k_1 D/Q + k_2 \frac{Q}{2}.
\end{aligned}$$

□

La dérivé de $C(Q)$ est donc

$$C'(Q) = -k_1 D/Q^2 + k_2/2. \tag{11}$$

Le seul point critique est à

$$Q^* = \sqrt{2k_1 D/k_2}. \tag{12}$$

Unités : $C(Q)$ devise. Ce qui implique les unités de k_1 devise (coût par commande) et k_2 devise/quantité. L'unité Q peux ne pas être homogène s'il y a plusieurs produits dans la commande. Pour éviter ce problème la coutume est de mesurer Q en devise et k_2 en pourcentage.

On peut utiliser (8) pour exprimer C en fonction de T :

$$C(T) = k_1\theta/T + k_2 T D/2\theta. \tag{13}$$

et calculer $T^* = \theta\sqrt{2k_1/k_2 D}$.

Remarque 1. *Il y a en général, un choix dans les unités de quantité Q : kilo, unités, litres, etc. Pour être homogène, le choix de devise est toujours cohérent. Si on commande plusieurs articles du même fournisseur, le choix de devise s'impose pour cette raison.*

Le modèle de Wilson est très rarement utilisé pour des problèmes suivants :

1. (H1) est rarement vérifiée.
2. L'ensemble de l'hypothèse (H2) est rarement vérifié.
3. l'informatique a fortement réduit le coût de gestion de commande c_g.
4. Le coût de possession c_p n'est pas linéaire : la partie financière oui, mais pas le coût du local de stockage qui est plutôt en escalier. Donc (H3) n'est pas vérifiée.
5. Souvent les commandes de grandes quantité s'accompagne d'une réduction de prix, (H4) n'est pas vérifiée.

Cependant le modèle de Wilson peut être utilisé comme point de départ pour établir une politique d'achat.

2.1.1 Un exemple de Wilson simple

On suppose que l'entreprise X stocke le produit A et que les hypothèses (H1)–(H4) sont vérifiées.

1. $D = 10000$ unités annuelles.
2. Coût par commande $c_g = 40$ Ğ1.
3. Prix par unité $P = 50$ Ğ1.
4. Coût de possession $c_p = 10\%$ par θ.

Donc $k_1 = c_g = 40$. Si on exprimant D en unité on obtient $k_2 = 0,1 * 50 = 5$ Ǧ1 par unité ce qui donne

$$Q^* = \sqrt{2 * 40 * 10000/5} = 400 \text{ unités.}$$

Si on exprime Q et donc D en Ǧ1, on calcule $D = 50 * 10000$ Ǧ1 avec $k_2 = 10\% = 0,1$ et

$$Q^* = \sqrt{2 * 40 * 500000/0,1} = 20000 \text{ Ǧ1.}$$

On note que la valeur de 400 unités et $400 * 50 = 20000$ Ǧ1. Le nombre de commande $N = 500000/20000 = 10000/400 = 25$. Donc $T^* = \theta/N = 365/25 = 14,6$ jours.

On peut calculer

$$c_T^* = c_g^* + c_p^* = 40 * 25 + 0,1 * 20000/2 = 2000 \text{ Ǧ1.}$$

Si on commande tous les 15 jours, la commande sera de $Q = 20548$ Ǧ1 et $c_T = 2000,1$ Ǧ1. Si on commande tous les 20 jours, la commande sera de $Q = 27397,25$ Ǧ1 et $c_T = 2100$ Ǧ1. Une commande tous les 10 jours reviendrai à $c_T = 2145$ Ǧ1.

On suppose maintenant que l'entreprise stocke aussi le produit B du même fournisseur :

1. $D_B = 5000$ unités annuelles.
2. Prix par unités : $P = 30$ Ǧ1.

Dans ce cas, on ne peut plus utiliser les unités, on est obligé d'utiliser la devise comme unité. On a

$$D = 10000 * 50 + 5000 * 30 = 650000 \ \text{ Ǧ1.}$$

D'où

$$Q^* = \sqrt{2 * 40 * 650000/0,1} \approx 22803 \ \text{ Ǧ1}$$

qui correspond à

$$T^* = 365/N = 365 * \frac{Q^*}{D} = 365 * \frac{22803}{650000} \approx 12,8 \ \text{ jours}$$

2.2 Modifications du modèle de Wilson

2.2.1 (H1) n'est pas vérifiée

En utilisant les statistiques inférentielles on peut estimer la demande $\hat{D}$. On calcule $\hat{Q}^*$ et $\hat{T}^*$ en utilisant $\hat{D}$. On peut garder ou bien les périodes $\hat{T}^*$ constant et varier $\hat{Q}^*$ à chaque commande, ou bien garder $\hat{Q}^*$ constant et varier les périodes de commandes (système de seuil).

Remarque 2. *Dans ce cas (H2) 2. n'est pas satisfaite. Il y aura deux conséquence :*

1. *On va refaire le calcul de $\hat{T}^*$ et/ou $\hat{Q}^*$ à chaque commande car l'estimation de $\hat{D}$ change à chaque commande.*
2. *On ne peut plus supposer que $c_r = 0$. On sera amener à utiliser la probabilité pour établir une politique de stock de sécurité.*

2.2.2 (H2) n'est pas vérifiée

Si (H2) n'est pas vérifiée, il y a plusieurs modifications possibles. Comme signalé dans Remarque 1, on ne peut plus supposer que $c_r = 0$ ce qui amène à déterminer un stock de sécurité. En prenant les valeurs moyennes, on peut faire des calculs du modèle de Wilson, mais on perd l'optimalité. Donc on compare le coût de plusieurs solutions possibles.

Stock de sécurité Pour établir un stock de sécurité S_s, on utilise les statistique inférentielle pour calculer l'espérence du coût de rupture de stock en fonction du stock de sécurité avec la formule $E(c_r(S_s)) = \P\{\mathrm{rupturedestock}|\mathrm{S_s}\} * \mathrm{c_r}$ ainsi que le coût du stock de sécurité : $c_p(S_s)$. Si (H3) est vérifiée, $c_p(S_s) \approx k_2 S_s$. On a donc le coût de rupture de stock en fonction du stock de sécurité :

$$c_r(S_x) = E(c_r(S_s)) + k_2 S_s. \tag{14}$$

On choisit S_s pour minimiser cette expression.

Remarque 3. *Le calcul de $E(c_r(S_s))$ doit tenir compte du nombre de jours de rupture de stock selon S_s.*

2.2.3 Exemples de modifications du modèle de Wilson

On reprend l'exemple de la Section 2.1.1 en supposant que l'entreprise

2.2.4 Demande discrète estimée

SA Bankiz approvisionne en crème glacée son agence de Strasbourg au début de chaque mois et lui facture 280 Ğ1 la boîte de crème glacée. Les crèmes glacées invendues sont reprises au prix de 80 Ğ1 la boîte. Ces crèmes glacées sont vendues aux distributeurs au prix de 400 Ğ1 la boîte. L'agence de Strasbourg réalise donc un gain par boîte vendue de $400 - 280 = 120$ Ğ1 et une perte par boîte invendue de $280 - 80 = 200$ Ğ1. L'historique des ventes sur 5 ans est la suivante :

Demande mensuelle	5	6	7	8	9	10
Effectif de mois	3	6	15	21	12	3

Ce qui correspond aux fréquences suivantes :

Demande mensuelle	5	6	7	8	9	10
Fréquences	0,05	0,10	0,25	0,35	0,20	0,05

En livrant 7 boîtes, les marges probables sont :

Demande	Marge sur boîtes vendues	Pertes boîtes invendues	Marge	Probabilité	Marge pondérée
5	5*120=600	2*200=400	200	0,05	10
6	6*120 = 720	1*200=200	520	0,1	52
7	7*120=840	0	840	0,25	210
8	7*120=840	0	840	0,35	194
9	7*120=840	0	840	0.30	168
10	7*120=840	0	840	0,05	42
				Marge espérée	776

En faisant les mêmes calculs pour les autres quantités livrés on trouve :

Q^D	5	6	7	8	9	10	Marge espérée
5	600	600	600	600	600	600	600
6	400	720	720	720	720	720	704
7	200	520	840	840	840	840	776
8	0	320	640	960	960	960	768
9	200	120	440	760	1080	1080	648
10	400	80	240	560	880	1200	464

La marge espérée la plus grande est une livraison de 7 boîtes. En négligeant le coût de possession et le coût de rupture de stock, on fera livrer 7 boîtes.

Remarque 4. *1. À cause du caractère périssable du stock, le temps entre livraisons est fixe quelque soit la quantité livrée, donc le coût de gestion des commandes ne dépend pas des quantités commandées.*

2. Le nombre d'unités commandées est faible donc on a pu vérifier l'espérance de chaque commande possible. Les quantités commandées sont discrètes.

3. On a négligé les pertes liés aux boîtes pas entièrement vendues.

2.2.5 Demande continue estimée

La société Saphir utilise un composant A dont la demande est estimée à 102300 unités annuelle (310 jours ouvrables).

1. Le coût unitaire est 9,80 Ğ1.
2. La société retient un réapprovisionnement tous les 10 jours, compte non tenu du délai de livraison de 5 jours.
3. Le coût de possession est 25%.
4. Le coût de gestion de commande est 130 Ğ1.
5. La demande mensuelle $D_m \sim \mathrm{N}(8524, 1205^2)$.

Exercice 1. *1. Quelle est la loi des quantités consommées sur la période totale de réapprovisionnement (délai de livraison inclus) ?*

2. Si l'entreprise retient un stock de sécurité de 645 unités, quelle sera la probabilité d'être en rupture de stock ?

3. *Quel doit être le stock de sécurité pour que la probabilité de ne pas être en rupture de stock atteigne au moins 95% ? quel sera alors le coût annuel de possession du stock ?*

1. La période de réapprovisionnement = 10+5 = 15 jours. Soit Q la quantité consommée par quinzaine. Donc $Q = D_m/2$. D'où

$$E(Q) = 0,5E(D_m) = 0,5 \times 8524 = 4262$$
$$\sigma(Q) = 0,5\sigma(D_m) = 0,5 \times 1205 = 602,5$$

   donc $Q \sim \mathrm{N}(4262, (602,5)^2)$.

2. ¶(rupture) = ¶($Q > 4262 + 645$). On pose $T = (Q - 4262)/602,5) \sim \mathrm{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned} ¶(Q > 4262 + 645) &= ¶(T > 645/602,5) \\ &= 1 - ¶(T \leq 1,07) \\ &= 0,1423. \end{aligned}$$

2.2.6 Tarifs dégressifs

Un fournisseur de bouteilles pratiques les tarifs :

Quantité commandée	$Q < 1000$	$1000 \leq Q < 2000$	$Q \geq 2000$
Prix du carton	20,50	20,00	19,80

Le prix d'une commande est 70 Ğ1. Le coût du stockage de 100 cartons pour un jour est de 0,25 Ğ1. La demande annuelle est 18000 cartons.

Déterminer la quantité optimale à commander en supposant un an = 360 jours.

Le coût total pour l'année en fonction des quantités *exprimées en unités* est

$$c(Q) = 70 \times D/Q + 0,25 \times \frac{Q}{100} \times \frac{1}{2} \times 360.$$

On obtient,

$$Q^* = \sqrt{70 \times 18000/(0,25 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} \times 360)} \approx 1670 \text{ cartons.}$$

On obtient $c(Q^*) = 1506$ Ğ1. On remarque que $1000 < Q^* < 2000$. Il est possible qu'une quantité supérieur à Q^* soit plus intéressante. Pour le savoir on calcul c(2000)= 1530 Ğ1, une valeur proche du minimum. Avec une réduction de 1% sur le prix on fait une économie de $2000 \times 20 \times 0,01 = 400$ Ğ1. On en déduit que la quantité la plus intéressante est 2000 unités.