

Analyse Numérique

Ian Schindler <https://www.math.univ-toulouse.fr/~schindle/>

24 mars 2021

Outline

Introduction

Approximation Polynomiale

Integration Numérique

Méthodes itératives pour la résolution d'équations

La Note

- ▶ 60% partiel
- ▶ 40% contrôle continu
 - ▶ TP scilab.
 - ▶ Projet
- ▶ dernière séance : cours d'économie biophysique facultatif

Calculs Numérique Approchés

Nombres réels

$$x \in \mathbb{R}^*$$

$$x = \pm b^p m = \pm b^p \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}, \quad (1)$$

ou $b \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \{0, \dots, b-1\}$, $m := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

$$x \approx x' = \pm b^p m' = \pm b^p \sum_{k=1}^N a_k b^{-k},$$

ou $m' := \sum_{k=1}^N a_k b^{-k}$ et $0 < m \leq 1$, $a_1 \neq 0$.

- ▶ b est la *base*, pour l'ordinateur, en général, $b = 2$ ou 16 . On pourra utiliser $b = 10$ pour des exercices.
- ▶ m' est la *mantisse*, N est la *longueur* de la mantisse.

Majoration de l'erreur

$$\Delta x := |x - x'| \quad (2)$$

$$= b^p \Delta m \quad (3)$$

$$= b^p \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k b^{-k}$$

$$\leq b^p \sum_{k=N+1}^{\infty} (b-1)b^{-k}$$

$$= b^p(b-1) \sum_{k=N+1}^{\infty} b^{-k}$$

$$= b^p b^{-N}. \quad (4)$$

La précision relative :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x}{|x|} &= \frac{b^p \Delta m}{b^p m} \\ &\leq \frac{b^{-N}}{b^{-1}} \\ \frac{\Delta x}{|x|} &\leq b^{1-N} = \varepsilon.\end{aligned}\tag{5}$$

Arrondie

$$x' = \begin{cases} b^p \sum_{k=1}^N a_k b^{-k} & \text{si } a_{N+1} < b/2 \\ b^p ((\sum_{k=1}^{N-1} a_k b^{-k}) + (a_N + 1)b^{-N}) & \text{si } a_{N+1} \geq b/2. \end{cases} \quad (6)$$

Non associativité

Exemple avec arrondie : $b = 10$, $N = 3$, $x = 8,22$, $y = 0,00317$ et $z = 0,00432$:

$$(x + y)' = 8,22317' = 8,22$$

$((x + y)' + z)' = 8,22$. Par contre,

$$(y + z)' = 0,749 \times 10^{-2}$$

$$\begin{aligned}(x + (y + z)')' &= 8,22749' \\ &= 8,23.\end{aligned}$$

$$(x + (y + z)')' \neq ((x + y)' + z)'.$$

Erreur d'une somme 1

(5) donne :

$$\begin{aligned}\Delta(x' + y') &= |(x' + y')' - (x' + y')| \\ &\leq \varepsilon |x' + y'| \\ &\leq \varepsilon (|x'| + |y'|) \\ &\leq \varepsilon (|x| + \Delta x + |y| + \Delta y) \\ &\approx \varepsilon (|x| + |y|).\end{aligned}$$

$$\varepsilon \Delta x \approx 0.$$

Erreur d'une somme 2

$$\begin{aligned}\Delta(x + y) &= |(x + y) - (x' + y')'| \\ &= |(x + y) - (x' + y') + (x' + y') - (x' + y')'| \\ &\leq |x - x'| + |y - y'| + |(x' + y') - (x' + y')'| \\ &\leq \Delta x + \Delta y + \varepsilon(|x| + |y|)\end{aligned}\tag{7}$$

Exemple (somme)

$$S_n := \sum_{i=1}^n u_i \quad (8)$$

On suppose $u_i > 0$, $\Delta u_i = 0$ et on note $S_k := \sum_{i=1}^k u_k$,
 $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Delta S_k \leq \Delta S_{k-1} + \varepsilon(S_{k-1} + u_k) \quad (9)$$

$$= \Delta S_{k-1} + \varepsilon S_k. \quad (10)$$

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned} \Delta S &\leq \varepsilon(S_2 + \dots + S_n) \\ &= \varepsilon(u_n + 2u_{n-1} + \dots + (n-1)u_2 + (n-1)u_1). \end{aligned}$$

Petites valeurs d'abord !

Erreur d'un produit 1

$$\begin{aligned}\Delta(x'y') &= |x'y' - (x'y')'| \\ &\leq \varepsilon |x'y'| \\ &\leq \varepsilon |(x + \Delta x)(y + \Delta y)| \\ &\approx \varepsilon |xy|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x'y' - xy| &= |x'y' - x'y + x'y - xy| \\ &= |x'\Delta y + y\Delta x| \\ &\leq |x'|\Delta y + |y|\Delta x \\ &\leq (x + \Delta x)\Delta y + |y|\Delta x \\ &\approx |x|\Delta y + |y|\Delta x.\end{aligned}$$

Erreur d'un produit 2

$$\begin{aligned}\Delta(xy) &= |xy - (x'y')'| \\ &= |xy - x'y' + x'y' - (x'y')'| \\ &\leq |xy - x'y'| + |x'y' - (x'y')'| \\ &\approx |x|\Delta y + |y|\Delta x + \varepsilon|xy|\end{aligned}\tag{11}$$

Cumulation d'Erreurs Aléatoires

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \quad u_i \geq 0, \quad \Delta u_i = 0,$$

$$S_k := \sum_{i=0}^k u_i = S_{k-1} + u_k$$

$$\alpha_k := \Delta S_k - \Delta S_{k-1}.$$

$$\begin{aligned} \implies |\alpha_k| &\leq \varepsilon S_k \\ &\leq \varepsilon S. \end{aligned} \tag{12}$$

Hypothèses

1. α_i sont des V.A. globalement indépendantes.
2. $E(\alpha_i) = 0$.

Implications probabilistes

De 1. : $\text{Var}(\Delta S_n) = \sum_{i=1}^n \text{var}(\alpha_i)$.

$\text{Var}(\alpha_i) \leq \varepsilon^2 S^2$, et Bienaymé- Tchebychev :

$$\mathbb{P}(X \geq \beta) \leq \frac{\sigma^2}{\beta^2} \quad \beta > 0$$

(12) $\implies \text{Var}(\alpha_i) \leq \varepsilon^2 S^2$, Bienaymé- Tchebychev :

$$\mathbb{P}(X \geq \beta) \leq \frac{\sigma^2}{\beta^2} \quad \beta > 0$$

Exemple probabiliste

$$\mathbb{P}(|\Delta S_n| \geq 10\sqrt{n\epsilon}S) \leq 0,01.$$

Phénomène de Compensation

Exemple : $b = 10$, $N = 10$, $x^2 - 1634x + 2 = 0$. $\Delta = 667487$.
 $\sqrt{\Delta} \approx 816,9987760$.

$$x'_1 = 817 + \sqrt{\Delta} = 1633,998776$$

$$x'_2 = 817 - \sqrt{\Delta} = 0,0012240.$$

Ici $x_1 x_2 = 2$, $x_2 = 2/x_1 \approx 1,223991125 \times 10^{-3}$.

Notations

Notations : $\mathbb{R}_n[x] := \{\text{polynômes à coefficients réels de degré } \leq n\}$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, alors

$$\|f\|_{L^\infty([a,b])} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \quad (13)$$

Propriétés :

1. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \implies f = 0$.
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
4. $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$.

$C([a, b]) := \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} / f \text{ continue}\}$

$C^n([a, b]) := \{f : [a, b] \mapsto \mathbb{R} / f^{(n)} \text{ continue}\}.$

Méthode d'Interpolation de Lagrange

Theorem

Soit $f \in C([a, b])$ et $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Alors il existe un polynôme unique dans $\mathbb{R}_n[x]$ qui interpole f au points x_i donné par (16).

$x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

$$\pi_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]. \quad (14)$$

Existence

$f \in C([a, b])$, $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $p_n(x_i) = f(x_i) \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.
 p_n *interpole* f aux points (nœuds) x_i .

$$l_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (15)$$

$l_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$. $l_i(x_i) = 1$.

$$p_n(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \in \mathbb{R}_n[x]. \quad (16)$$

Unicité

Soit $q_n \in \mathbb{R}_n[x]$ une autre solution, donc $p_n(x_i) = q_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. Donc x_i est racine de $p_n(x) - q_n(x)$ pour $i = 0, \dots, n$. Par conséquent, $\pi_{n+1}(x)$ divise $p_n(x) - q_n(x)$. Puisque π_{n+1} est de degré $n + 1$ et $p_n - q_n$ est de degré n ,
 $p_n(x) - q_n(x) = 0$. ■

Méthode de Différences Divisées

Soit p_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \dots, x_n$. On note $f[x_0, \dots, x_k]$ le coefficient directeur de p_k . Le polynôme $p_k - p_{k-1}$ s'annule aux points $x_0, \dots, x_{k-1}$ d'où :

$$p_k - p_{k-1} = f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}). \quad (17)$$

$$p_0 = f(x_0) = f[x_0].$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_0 + \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Formule de récurrence

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \quad (19)$$

Vérification

Soit $q_{k-1} \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1, \dots, x_k$.

$$\tilde{p}_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(x - x_0)q_{k-1}(x) - (x - x_k)p_{k-1}(x)}{x_k - x_0}$$

$\tilde{p}_k \in \mathbb{R}_k[x]$. De plus, $\tilde{p}_k(x_0) = f(x_0)$, $\tilde{p}_k(x_i) = f(x_i)$ et pour $0 < i < k$, $\tilde{p}_k(x_i) = f(x_i)$. Donc $\tilde{p}_k = p_k$ ce qui implique (19).

Exemple de tableau de récurrence

$n=3$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x_0) = f[x_0] & \mapsto & f[x_0, x_1] & \mapsto & f[x_0, x_1, x_2] & \mapsto & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 f(x_1) = f[x_1] & \nearrow & f[x_1, x_2] & \nearrow & f[x_1, x_2, x_3] & \nearrow & \\
 f(x_2) = f[x_2] & \nearrow & f[x_2, x_3] & \nearrow & & & \\
 f(x_3) = f[x_3] & \nearrow & & & & &
 \end{array}$$

Formule de différence

Theorem

Soient $f \in C^{n+1}([a, b])$, $x_i \in [a, b]$ et $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ le polynôme d'interpolation de f aux points x_i . Alors pour $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (20)$$

Rolle +

Lemma

Soit $g \in C^p([a, b])$ et $c_0 < c_1 < \dots < c_p \in [a, b]$ tels que $g(c_i) = 0 \forall i$. Alors il existe $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.

Preuve Rolle +

Par récurrence. Pour $p = 1$ c'est le théorème de Rolle. Supposons vraie pour $p - 1$ et supposons on a $p + 1$ points $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ avec $g(c_i) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $p - 1$ points c'_i ou $g'(c'_i) = 0$. Par hypothèse il existe un point ξ tel que $g^{(p-1)}(\xi) = 0$. On a $g^{(p)}(\xi) = 0$. ■

Preuve de la formule de différence

Si $x = x_i$, $\pi_{n+1}(x) = 0$, tout point $\xi_x \in]a, b[$ convient. Supposons $x \neq x_i$ pour tout i . Soit $p_{n+1}(t) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ le polynôme d'interpolation aux points $x, x_0, \dots, x_n$. Posons

$$e_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} p_{n+1}(t) - p_n(t) = c\pi_{n+1}(t). \quad (21)$$

et

$$\begin{aligned} g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} f(t) - p_{n+1}(t) + (p_n(t) - p_n(t)) \\ &= f(t) - p_n(t) - c\pi_{n+1}(t). \end{aligned}$$

$g \in C^{n+1}([a, b])$ s'annule en $x, x_0, \dots, x_n$. Rolle + $\implies \exists \xi_x \in]a, b[$, tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. On a $p_n^{(n+1)}(x) = 0$, $\pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. On en déduit que $c = f^{(n+1)}(\xi_x)/(n+1)!$.

Preuve de la formule de différence (fin)

Puisque

$$f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x),$$

on obtient (20). ■

La formule d'erreur

Corollaire

$$\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \|f^{(n+1)}\|. \quad (22)$$

Meilleures points ?

$\{x_0, \dots, x_n\} \quad x_i \in [a, b] ?$

(22) $\implies$ estimation de $\|\pi_{n+1}\|$.

Cas des Points Équidistants

$[a, b]$. $x_i = a + ih = a + i\frac{b-a}{n}$, $0 \leq i \leq n$. On pose $s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x-a}{h}$.

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(x) &= (x - x_0) \cdots (x - x_n) \\&= (x - a)(x - (a + h)) \cdots (x - (a + nh)) \\&= h \left(\frac{x - a}{h} \right) h \left(\frac{(x - a) - h}{h} \right) \cdots h \left(\frac{(x - a) - nh}{h} \right) \\&= h^{n+1} s(s - 1) \cdots (s - n) \quad s \in [0, n].\end{aligned}$$

Max $|\pi_{n+1}(s)|$ points équidistants

$$\pi_{n+1}(s) = h^{n+1} s(s-1) \cdots (s-n).$$

$$\phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} |s(s-1) \cdots (s-n)| \text{ pour } s \in [0, n]. \quad \phi(n-s) = \phi(s) \text{ donc}$$

$$\max_{s \in [0, n]} \phi(s) = \max_{s \in [0, n/2]} \phi(s).$$

On a

$$\frac{\phi(s-1)}{\phi(s)} = \frac{n+1-s}{s} > 1 \quad s \in [1, n/2].$$

Donc $\phi(s-1) > \phi(s)$, $s \in [1, n/2] \implies$

$$\max_{s \in [0, n]} \phi(s) = \max_{s \in [0, 1]} \phi(s) \leq n!.$$

Formule d'erreur points équidistants

$$\begin{aligned}\|\pi_{n+1}\| &= h^{n+1} \|\phi\| \\ &\leq h^{n+1} n!\end{aligned}\tag{23}$$

$$\|\pi_{n+1}\| \sim \left(\frac{b-a}{e} \right)^{n+1}.\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\|f - p_n\| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \|f^{n+1}\| \\ &\leq \frac{h^{n+1} n!}{(n+1)!} \|f^{n+1}\| \\ &= \frac{h^{n+1}}{n+1} \|f^{n+1}\|\end{aligned}\tag{25}$$

Les polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont définis par

$$t_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(n \arccos x). \quad (26)$$

Posons $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \arccos x$. $t_n(\theta) = \cos(n\theta)$.

$$\begin{aligned} t_{n+1}(\theta) + t_{n-1}(\theta) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ &\quad + \cos n\theta \cos(-\theta) - \sin n\theta \sin(-\theta) \\ &= 2 \cos n\theta \cos \theta \\ &= 2xt_n(x). \end{aligned}$$

Les points de Tchebychev

Donc $t_0(x) = 1$, $t_1(x) = x$ les autres sont obtenus par la formule de récurrence $t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)$. $t_n \in \mathbb{R}_n[x]$ avec coefficient directeur 2^{n-1} . Puisque $x = \cos \theta \in [-1, 1]$, les polynôme de Tchebychev sont définis sur $[-1, 1]$. Si $t_n(x) = \cos n\theta = 0$, alors $n\theta = \frac{\pi}{2} + i\pi$, ou bien $\theta = \frac{2i+1}{2n}\pi$. À priori, $i \in \mathbb{Z}$, mais puisque $t_n \in \mathbb{R}_n[x]$ il n'y a que n racines différentes, et donc on peut prendre $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Definition

Les *points d'interpolation de Tchebychev* d'ordre n sont les points $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ racines de $t_{n+1}(x)$.

$$t(u) \longrightarrow \pi(x)$$

En prenant $u \in [-1, 1]$ et $u_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi)$, on peut écrire

$$t_{n+1}(u) = 2^n \prod_{i=0}^n (u - u_i) \quad (27)$$

$$= 2^n \pi_{n+1}(u). \quad (28)$$

Pour se ramener à l'intervalle $[a, b]$,

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\mapsto [a, b] \\ u &\mapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u. \end{aligned}$$

$$u_i \longrightarrow x_i$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} x - x_i &= \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u - \left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}u_i\right) \\ &= \frac{b-a}{2}(u - u_i) \end{aligned}$$

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^n (u - u_i),$$

$\|\pi\|$ Tchebychev

$$\prod_{i=0}^n (u - u_i) = \frac{1}{2^n} t_{n+1}(u). \text{ D'où}$$

$$\pi_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} t_{n+1}(u).$$

$$\|t_{n+1}\| = 1 \implies$$

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1}\| &= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \\ &= 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \\ &< \left(\frac{b-a}{e} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Exemple

$$n = 30,$$

$$\left(\frac{e}{4}\right)^{31} < 7 \cdot 10^{-6}.$$

Principe des Méthodes Numériques

On cherche une valeur approchée de $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. On partitionne $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta$. La formule de Chasles donne

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{i=0}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx.$$

Méthodes de quadrature élémentaires

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx = (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} f(\xi_{i,j}),$$

où $\sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} = 1$, $\xi_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $0 \leq j \leq l_i$.

Méthodes de quadrature composée

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} f(\xi_{i,j}).$$

L'ordre

Definition

Une méthode de quadrature est d'*ordre* N si la formule est exacte pour $f \in \mathbb{R}_N[x]$ et inexacte pour la fonction $x \mapsto x^{N+1}$.

$l_i = 0$ pour tout i

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx = (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i)$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i).$$

C'est une somme de Riemann si

1. $\xi_i = \alpha_i$ rectangles à droite.
2. $\xi_i = \alpha_{i+1}$ rectangles à gauche.

La méthode est d'ordre 0.

La méthode des trapèzes

$$l_i = 1 \quad \forall i, \quad \xi_{i,0} = \alpha_i, \quad \xi_{i,1} = \alpha_{i+1}.$$

$$p_1(x) = \frac{(x - \alpha_i)f(\alpha_{i+1}) - (x - \alpha_{i+1})f(\alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} p_1(x) dx \\ &= (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left(\frac{1}{2} f(\alpha_i) + \frac{1}{2} f(\alpha_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

La méthode est d'ordre 1.

Méthodes Newton-Cotes

$$NC_l, \quad I_i = I \quad \forall i.$$

$$\xi_{i,j} = \alpha_i + j \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{l} \quad 0 \leq j \leq l$$

$$p_l(x) = \sum_{j=0}^l f(\tau_j) L_j(x)$$

$$L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \tau_k}{\tau_j - \tau_k}.$$

$$\text{Si } [\alpha_i, \alpha_{i+1}] = [-1, 1], \quad \tau_j = -1 + j \frac{2}{l}.$$

NC_l mode d'emplois

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) \, dx &\approx \int_{-1}^1 p_l(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^l (L_j(x) f(\tau_j)) \, dx \\ &= \sum_{j=0}^l f(\tau_j) \int_{-1}^1 L_j(x) dx \\ &= 2 \sum_{j=0}^l w_j f(\tau_j),\end{aligned}$$

avec $w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_j(x) dx$.

Le calcul des w_j :

$\tau_{l-j} = -\tau_j \implies L_{l-j}(x) = L_j(-x) \implies w_{l-j} = w_j$. Pour un domaine d'integration quelconque, on remarque que les w_j sont invariants par le changement de variable

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\mapsto [a, b] \\ u &\mapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u. \end{aligned}$$

L'ordre

Proposition

Si l est pair, les méthodes NC_l sont d'ordre $l + 1$. Si l est impair, les méthodes NC_l sont d'ordre l .

Explication de l'ordre NC_l

Par changement de variable :

$$[a, b] \mapsto [-1, 1]$$

$$x \mapsto u = \frac{2}{a-b} \left(x - \frac{b+a}{2} \right),$$

il suffit de prendre $[a, b] = [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} T(f) &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{j=0}^l w_j f(\tau_j) \\ &= \int_{-1}^1 p_l(u) du. \end{aligned} \tag{29}$$

$$f \in \mathbb{R}_l[x] \implies p_l = f \implies \text{l'ordre de } NC_l \geq l.$$

Explication (fin)

f impaire $\implies \int_{-1}^1 f(u)du = 0$. $w_i = w_{l-i} \implies f$ impaire alors $T(f) = 0$. Il vient que l pair $\implies NC_l$ d'ordre $\geq l + 1$.

Formule de Taylor (reste integrale)

Pour $f \in C^{N+1}([\alpha, \beta])$ et $x \in [\alpha, \beta]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(\alpha) (x - \alpha)^k + \int_{\alpha}^x \frac{1}{N!} (x - t)^N f^{(N+1)}(t) dt. \quad (30)$$

Vérification de la formule de Taylor

Par récurrence sur N .

Initiation, $N = 0$:

$$f(x) = f(\alpha) + \int_{\alpha}^x f'(t) dt.$$

Hérédité Taylor :

Supposons la formule vérifiée pour $N - 1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\alpha)(x - \alpha)^k \\ + \int_{\alpha}^x \frac{1}{(N-1)!} (x-t)^{(N-1)} f^{(N)}(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^x \frac{1}{(N-1)!} (x-t)^{(N-1)} f^{(N)}(t) dt &= - \left[\frac{1}{N!} (x-t)^N f^{(N)}(t) \right]_{\alpha}^x \\ &+ \int_{\alpha}^x \frac{1}{N!} (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{N!} (x-\alpha)^N f^{(N)}(\alpha) \\ &+ \int_{\alpha}^x \frac{1}{N!} (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

La formule de la moyenne

Soient $0 \leq w(x)$ intégrable et $f \in C([a, b])$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = f(\xi) \int_a^b w(x)dx. \quad (31)$$

Vérification de la formule de la moyenne

Soient $m := \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors

$$c = m \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b f(x) w(x) dx \leq M \int_a^b w(x) dx = C.$$

On pose $v = \int_a^b f(x) w(x) dx$. Soit

$G(t) := f(t) \int_a^b w(x) dx - v \in C([a, b])$. Puisqu'il existe $\xi_i \in [a, b]$, $i = 1, 2$, tel que $G(\xi_1) = c - v \leq 0$ et $G(\xi_2) = C - v \geq 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in [a, b]$ qui vérifie (31). ■

Le noyau de Peano

$$Tf \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx Tf, \quad (32)$$

on définit

$$E(f) := \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j). \quad (33)$$

Définition

On définit

$$K_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(x \mapsto ((x - t)_+)^N) \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (34)$$

Formule de l'erreur d'une méthode NC_N

Theorem

Si la méthode est d'ordre N et $f \in C^{N+1}([\alpha, \beta])$,

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt. \quad (35)$$

Vérification de la formule d'erreur d'une méthode 1

$$x_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, 0\}.$$

Démonstration. L'application $f \mapsto E(f)$ est une forme linéaire. Si $g : (x, t) \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $I := [\alpha, \beta]$, le théorème de Fubini implique que

$$E\left(x \mapsto \int_{t \in I} g(x, t) dt\right) = \int_{t \in I} E(x \mapsto g(x, t)) dt.$$

Vérification de la formule d'erreur d'une méthode 2

Par (30) on peut écrire

$$f(x) = p_N(x) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{N!} ((x-t)_{+})^N f^{(N+1)}(t) dt.$$

On a $p_N \in \mathbb{R}_N[x]$, donc $E(p_N) = 0$ d'où

$$\begin{aligned} E(f) &= E\left(x \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{N!} ((x-t)_{+})^N f^{(N+1)}(t) dt\right) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} E\left(x \mapsto \frac{1}{N!} ((x-t)_{+})^N f^{(N+1)}(t)\right) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(t) E(x \mapsto (x-t)_{+}^N) dt \\ &= \frac{1}{N!} \int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Corollaire 1

Corollaire

$$|E(f)| \leq \frac{1}{N!} \|f^{(N+1)}\|_{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |K_N(t)| dt. \quad (36)$$

Corollaire 2

Corollaire

Si K_N est de signe constant et $f \in C^{N+1}(I)$ alors $\exists \xi \in I$ tel que

$$E(f) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) E(x \mapsto x^{N+1}). \quad (37)$$

Vérification du corollaire 2

Démonstration. Par le théorème de la moyenne, on a

$$E(f) = \frac{1}{N!} f^{N+1}(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) dt. \quad (38)$$

En prenant $f : x \mapsto x^{N+1}$ et en remplaçant dans (38), on obtient :

$$\int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) dt = \frac{1}{N+1} E(x \mapsto x^{N+1}).$$

Remplaçant cette expression pour $\int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) dt$ dans (38) donne (37).

Exemples

$$I = [-1, 1].$$

Méthode du point milieu. Méthode d'ordre 1.

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx - 2f(0).$$

$$\begin{aligned} K_1(t) &= E(x \mapsto (x - t)_+) \\ &= \int_{-1}^1 (x - t)_+ dx - 2(-t)_+ \\ &= \int_t^1 (x - t) dx - 2t_- \\ &= \left[\frac{1}{2}(x - t)^2 \right]_t^1 - 2t_- \end{aligned}$$

$K_1(t)$ point milieu

$$= \frac{1}{2}(1-t)^2 - 2t_-$$
$$K_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-t)^2 & t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 + 2t & t < 0. \end{cases}$$

$E(f)$ point milieu

$$\int_{-1}^1 K_1(t) dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = 1/3,$$

$$E(f) = \frac{1}{3} f''(\xi) \quad \xi \in]-1, 1[.$$

Par corollaire 2 :

$$\begin{aligned} E(x \mapsto x^2) &= \int_{-1}^1 x^2 dx - 0 \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2!} E(x \mapsto x^2) f''(\xi) \\ &= f''(\xi)/3. \end{aligned}$$

Méthode du trapèze. Méthode d'ordre 1.

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - (f(-1) + f(1)).$$

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \int_{-1}^1 (x - t)_+ dx - ((-1 - t)_+ + (1 - t)_+) \\ &= \int_t^1 (x - t) dx - (1 - t) \\ &= -\frac{1}{2}(1 - t^2) \leq 0. \end{aligned}$$

$E(f)$ méthode du trapèze

$$\int_{-1}^1 K(t) dt = -\frac{2}{3}.$$

$$E(f) = -\frac{2}{3}f''(\xi).$$

Les suites de Cauchy, définitions préliminaires :

Un exemple : soit $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N 1/k$. Alors $S_{N+1} - S_N = 1/(N+1)$, donc $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{N+1} - S_N| = 0$, mais $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \infty$.

Definition

Le *supremum* (*infimum*) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est la plus petite (plus grande) borne supérieure (inférieure) de l'ensemble A .

Le supremum (parfois $+\infty$) d'un ensemble réel A existe toujours par la construction des nombres réels par les coupures de Dedekind. On écrit $\sup A$ ou $\inf A$.

Suites de Cauchy

Soit $(x_p)_p \subset \mathbb{R}$. On définit

$$\limsup x_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{p \geq N} x_p.$$

Si $\infty > M = \limsup x_p$, pour tout $\epsilon > 0$ et $N > 0$, il existe $I > N$ tel que $x_I > M - \epsilon$.

Definition

Une suite $(x_p)_{p \geq 0} \subset \mathbb{R}^N$ est *de Cauchy* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N_\epsilon$, $\|x_p - x_q\| < \epsilon$.

Caractérisation d'une suite convergente

Theorem

Une suite $(x_p)_p \subset \mathbb{R}^N$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.

$\implies N = 1$

On commence par le cas $N = 1$.

$\implies$: Supposons $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = L$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il exist $N_{\epsilon/2} \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq N_{\epsilon/2}$, $\|x_p - L\| < \epsilon/2$. Donc pour tout $p, q \geq N_{\epsilon/2}$,

$$\begin{aligned}\|x_p - x_q\| &= \|x_p - L + L - x_q\| \\ &\leq \|x_p - L\| + \|L - x_q\| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Puisque ϵ est quelconque, la suite $(x_p)_p$ est de Cauchy.

⇐ $N = 1$

Supposons $(x_p)_p$ est de Cauchy et soit $L = \limsup x_p$. $L < \infty$ car il exist N_1 tel que pour tout $p, q > N_1$, $\|x_p - x_q\| < 1$. Donc pour tout $p > N_1$,

$$\begin{aligned}\|x_p\| &= \|x_p - x_{N_1} + x_{N_1}\| \\ &\leq \|x_p - x_{N_1}\| + \|x_{N_1}\| \\ &\leq 1 + \|x_{N_1}\|.\end{aligned}$$

Donc $L \leq \|x_{N_1}\| + 1$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il exist $N_{\epsilon/2} \in \mathbb{N}$ tel que pour p et $q \geq N_{\epsilon/2}$, $\|x_p - x_q\| < \epsilon/2$. Par la définition de $\limsup$ il y a $l > N_{\epsilon/2}$ tel que $\|x_l - L\| < \epsilon/2$. Il vient que pour $p > N_{\epsilon/2}$,

$$\begin{aligned}\|x_p - L\| &= \|x_p - x_l + x_l - L\| \\ &\leq \|x_p - x_l\| + \|x_l - L\| \\ &= \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

$N > 1$

Le cas $N > 1$, suit par le fait qu'une suite $(x_p)_p \subset \mathbb{R}^N$ est de Cauchy si et seulement si chaque coordonné de $(x_p)_p$ est de Cauchy.

Principe (définitions)

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble compact (fermé et borné) et $\phi : E \mapsto E$.
Un *point fixe* $a \in E$ est un point tel que $\phi(a) = a$.

Definition

La fonction ϕ est *lipschitzienne* de rapport k dans E si

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E. \quad (39)$$

Definition

La fonction ϕ est *contractante* dans E si ϕ est lipschitzienne de rapport $k < 1$ dans E .

Théorème du point fixe

Theorem

Soit $\phi : E \mapsto E$ contractante. Alors ϕ possède un point fixe a , unique dans E . De plus la suite $(x_p)_p$ définie par

$$x_{p+1} = \phi(x_p) \quad x_0 \in E \tag{40}$$

converge vers a pour tout point $x_0 \in E$.

Démonstration d'unicité

Par l'absurde : supposons qu'il existe 2 points fixes a_1 et a_2 . Alors par (39) on obtient

$$\|\phi(a_1) - \phi(a_2)\| < \|a_1 - a_2\|,$$

mais par la définition d'un point fixe on a

$$\|\phi(a_1) - \phi(a_2)\| = \|a_1 - a_2\|.$$

Existence du point fixe 1

Soit $x_0 \in E$ et x_p définie par (40). On a

$$\|x_p - x_{p+1}\| = \|\phi(x_{p-1}) - \phi(x_p)\| \leq k \|x_{p-1} - x_p\|. \quad (41)$$

Par récurrence, on obtient donc

$$\|x_p - x_{p+1}\| \leq k^p \|x_1 - x_0\|. \quad (42)$$

Pour $q > p$,

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &\leq \sum_{l=p}^{q-1} \|x_l - x_{l+1}\| \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \sum_{l=p}^{q-1} k^l. \end{aligned}$$

Existence du point fixe 2

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{l=p}^{q-1} k^l &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{l=p}^{\infty} k^l \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k^p}{1-k} = 0,\end{aligned}$$

la suite $(x_p)_p$ est de Cauchy. Puisque E est fermé Il existe $a \in E$ tel que $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = a$. Puisque ϕ est continue, (40) implique que $\phi(a) = a$.

Vitesse de convergence

$$\begin{aligned}\|x_p - a\| &= \|\phi(x_{p-1}) - \phi(a)\| \\ &\leq k\|x_{p-1} - a\|.\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$\|x_p - a\| \leq k^p \|x_0 - a\|. \quad (43)$$

Quand arrêter un algorithme ?

Quand on écrit un algorithme utilisant la méthode du point fixe, on arrête souvent l'algorithme quand $\|x_p - x_{p+1}\|$ est petit. La justification est :

$$\begin{aligned}\|x_p - a\| &= \|x_p - x_{p+1} + x_{p+1} - a\| \\ &\leq \|x_p - x_{p+1}\| + \|a - x_{p+1}\| \\ &= \|x_p - x_{p+1}\| + \|\phi(a) - \phi(x_p)\| \\ &\leq \|x_p - x_{p+1}\| + k\|a - x_p\|\end{aligned}$$

d'où

$$\|x_p - a\| \leq \frac{1}{1-k} \|x_p - x_{p+1}\|. \quad (44)$$

Application

Soit $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$. Trouver a tel que $f(a) = 0$. On cherche donc une fonction ϕ telle que $\phi(a) = a \iff f(a) = 0$.

$N = 1$ cas 1

supposons $\phi \in C^1(I \mapsto I)$ et ϕ possède un point fixe a dans I .

1. $|\phi'(a)| < 1$. Soit k tel que $|\phi'(a)| < k < 1$. Par continuité, il existe h tel que pour $x \in E = [a - h, a + h]$, $|\phi'(x)| \leq k$. Pour $x \in E$, $|\phi(x) - \phi(a)| = |\phi(x) - a| \leq |x - a|$, donc $\phi(E) \subset E$. Le point fixe a est un point fixe *attractif*. La suite $(x_p)_p$ définie par (40) converge vers a .

$N = 1$ cas 2

2. $|\phi'(a)| > 1$. Soit k tel que $|\phi'(a)| > k > 1$. Par continuité, il existe h tel que pour $x \in E = [a - h, a + h]$, $|\phi'(x)| \geq k$. Pour $x \in E$, $|\phi(x) - \phi(a)| = |\phi(x) - a| > |x - a|$. a est un point fixe *répulsif*. Dans ce cas on utilise $\phi^{-1} : E \mapsto E$. Car a est aussi un point fixe pour ϕ^{-1} et $|(\phi^{-1})'(a)| = |1/\phi'(a)| < 1$ et pour $x \in E$, $|(\phi^{-1})'(x)| \leq 1/k < 1$.

$N = 1$ cas 3

3. Exemples :

3.1 $\phi(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. $\sin x < x$, $x \in [0, \pi/2]$, 0 est un point fixe attractif.

3.2 $\phi(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in [0, M]$. $\operatorname{sh} x > x$, $x \in [0, M]$. 0 est un point fixe répulsif.

Pas de conclusion possible.

Cas super attractif

Cas particulier : $\phi \in C^2(I)$ et $\phi'(a) = 0$. Soit M tel que $|\phi''(x)| \leq M$. On a pour $x \in I$,

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} \phi''(c).$$

Donc

$$\begin{aligned} |\phi(x) - a| &= |\phi(x) - \phi(a)| \\ &\leq \frac{1}{2} M |x - a|^2. \end{aligned}$$

Convergence quadratique

$$\frac{1}{2}M|\phi(x) - a| \leq \left(\frac{1}{2}M|x - a|\right)^2.$$

Par récurrence, on obtient

$$|x_p - a| \leq \frac{2}{M} \left| \frac{1}{2}M(x_0 - a) \right|^{2^p}. \quad (45)$$

Exemple point fixe

Soit $f : x \mapsto x^3 - 4x + 1$. On cherche a tel que $f(a) = 0$.
 $f'(x) = 3x^2 - 4$. $f(a) = 0 \iff \frac{1}{4}(a^3 + 1) = a$. Donc a est un
point fixe de $\phi : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 1)$. $\phi'(x) = \frac{3x^2}{4}$. L'analyse des
variations de f donne 3 racines $a_1 < a_2 < a_3$.

Racines

Le théorème des valeurs intermediares :

$$a_1 \in [-2, 5; -2]$$

$$a_2 \in [0; 0, 5]$$

$$a_3 \in [1, 5; 2]$$

Pour

$$x \in [-2, 5; -2] \quad \phi'(x) \geq \phi'(-2) = 3 > 1$$

$$x \in [0; 0, 5] \quad \phi'(x) \leq \phi'(0, 5) = 3/16 < 1$$

$$x \in [1, 5; 2] \quad \phi'(x) \geq \phi'(1, 5) = 27/16 > 1.$$

Conclusion : a_1 et a_3 sont des points fixes répulsifs, a_2 est un point fixe attractif.

Point fixe attractif

Pour a_2 , on a

$$\begin{aligned} |x_p - a_2| &\leq (3/16)^p |x_0 - a_2| \\ &\leq (3/16)^p \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Point fixe répulsif

Pour a_1 et a_3 , on utilise $\phi^{-1} : y \mapsto (4y - 1)^{1/3}$. Pour a_3 :

$$\begin{aligned} |y_p - a_3| &\leq (1/3)^p |y_0 - a_3| \\ &\leq (16/27)^p |\phi(2) - \phi(1, 5)| \\ &\leq (16/27)^p 1,25 \end{aligned}$$

La méthode de Newton

Approximation affine :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

ou bien

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Plus généralement :

$$x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{f'(x_p)}. \quad (46)$$

Newton et point fixe

$$\phi_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (47)$$

est contractante. Si $f \in C^3(I)$,

$$\phi'_N(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}. \quad (48)$$

Si a est racine de f et $f'(a) \neq 0$, $\phi'(a) = 0$ et $\phi \in C^2(I)$, donc a est un point fixe super attractif de ϕ_N . Plus généralement si $f'(x) \neq 0$ pour $x \in I = [a - r, a + r]$ on a :

Théorème pour la méthode de Newton

Theorem

Soit $f \in C^2(I)$ et soit $M = \sup_{x \in I} \frac{\|f''\|}{|f'(x)|}$, alors pour $x \in I$,

$$\frac{M}{2} |\phi(x) - a| \leq \left(\frac{M}{2} |x - a| \right)^2. \quad (49)$$

Démonstration du théorème de Newton

Soit $x \in I$. Alors la formule de Taylor en x donne :

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - a)^2.$$

En divisant par $f'(x)$ et en prenant le module, on trouve :

$$|a - x + f(x)/f'(x)| = \frac{1}{2!} \frac{|f''(c)|}{|f'(x)|} (x - a)^2,$$

qui donne (49).

Corollaire du théorème de Newton

Corollaire

Soit $f \in C^2(I)$ et M comme dans le Théorème 14 et la suite (x_p) définie par $x_{p+1} = \phi_N(x_p)$, alors

$$\frac{M}{2} |x_p - a| \leq \left| \frac{M}{2} (x_0 - a) \right|^{2^p}. \quad (50)$$

Exemple Newton

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &= x - \frac{x^2}{2x} \\ &= x - x/2 \\ &= x/2. \end{aligned}$$

$\phi'(0) = 1/2 < 1. \implies$ convergence mais pas quadratique.

Newton Raphson en N dimensions

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^t.$$

$$T : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = [T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x}) \dots, T_N(\mathbf{x})]^t.$$

$$JT(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial T_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, N \rrbracket}.$$

$$\phi_N(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - (JT)^{-1} T(\mathbf{x}).$$

Théorème Newton-Raphson

Theorem

Si $T \in C^2(E \mapsto E)$, $E \in \mathbb{R}^N$ compact, $T(\mathbf{a}) = 0$, $\mathbf{a} \in E$ et $\det JT(\mathbf{x}) \neq 0$ et $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in E} \frac{\|T''\|}{\|JT(\mathbf{x})\|}$ pour $\mathbf{x} \in E$, alors

$$\frac{M}{2} |\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| \leq \left(\frac{M}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \right)^2. \quad (51)$$

Justification

$$f(t) = \|T(\mathbf{a}) + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})\|^2.$$