

Existence et comportement asymptotique en temps des solutions de Navier-Stokes Coriolis dans une bande tridimensionnelle

Violaine Roussier-Michon

Département de mathématique, Université Paris-Sud

Bat 425, F-91405 Orsay Cedex, France

Violaine.Roussier@math.u-psud.fr

June 20, 2004

Introduction

Soit un fluide visqueux, incompressible, en rotation entre deux plaques infinies. Le vecteur vitesse u et le scalaire pression p de ce fluide vérifient l'équation de Navier-Stokes Coriolis

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \Omega e_3 \wedge u &= \Delta u - \nabla p, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où $u : \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^3$, $p : \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $\Omega \in \mathbf{R}$ est la vitesse angulaire de rotation et e_3 l'axe vertical de rotation.

Cette équation est, en première approximation, une modélisation du mouvement de l'atmosphère et des océans. En effet, ces fluides peuvent être considérés comme visqueux et incompressibles mais, au vue des différentes échelles de temps en jeu, l'influence de la rotation de la Terre sur leur mouvement ne peut être négligée [14]. L'équation de Navier-Stokes est alors pénalisée par le terme $\Omega e_3 \wedge u$ qui traduit la force de Coriolis appliquée au fluide. Cependant, de nombreux autres phénomènes importants en océanographie comme la salinité, la température ou les courants, sont ignorés. Il existe d'autres équations prenant en compte ces paramètres. Citons par exemple les modèles primitif et quasi-géostrophique [3], [7], [12], [13], le modèle des vents [5] ou celui d'un fluide entre deux sphères proches [18].

Afin de préciser l'existence et l'unicité des solutions de cette équation, il convient d'associer à (1) une condition initiale

$$u(x, z, 0) = u_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1)$$

et des conditions aux limites sur les deux plaques horizontales $z = 0$ et $z = 1$. Nous ne traiterons ici que les conditions aux bords périodiques

$$u(x, z + 1, t) = u(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Ces conditions ne sont pas très réalistes physiquement bien qu'elles permettent de modéliser certains phénomènes de turbulence. Elles facilitent cependant la résolution de certains passages techniques par l'utilisation de la transformée de Fourier. D'autres conditions aux limites sont également envisageables.

Les conditions stress-free représentent un écoulement sans cisaillement où la force appliquée par la paroi sur le fluide est orthogonale à la paroi. Mathématiquement, ceci se traduit par

$$u \cdot n = 0 \text{ et } (\text{rot } u) \wedge n = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \text{ et } z = 1$$

où n est la normale sortante au domaine $\mathbf{R}^2 \times (0, 1)$ et s'exprime par des conditions de type Neumann sur u_1 et u_2 et de type Dirichlet sur u_3 avec $u = (u_1, u_2, u_3)^T$. Le comportement asymptotique en temps de la solution est alors régi par l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^2$ et son étude est moins riche que dans le cas périodique.

On peut aussi envisager un écoulement où le fluide s'arrête sur les parois. Il satisfait des conditions aux limites de type Dirichlet homogène

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Cependant, comme nous le verrons ultérieurement, le comportement asymptotique en temps des solutions de (1) est donné par leur partie bidimensionnelle (indépendante de z), ce qui reviendrait à montrer que la solution converge vers 0 quand le temps t tend vers l'infini. L'étude est alors moins intéressante que dans le cas périodique.

Mathématiquement, l'équation de Navier-Stokes Coriolis est pénalisée par un opérateur antisymétrique L défini par $Lu = \Omega e_3 \wedge u$. Cette équation possède donc la même inégalité d'énergie que l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^3$ et par suite, les mêmes résultats d'existence et d'unicité. En choisissant une approche "à la Leray" [11], on sait qu'il existe, pour une condition initiale $u_0 \in L^2$, une solution faible globale $u \in L^\infty(\mathbf{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbf{R}^+, \dot{H}^1)$ à l'équation (1). En revanche, une approche "à la Kato" [6] montre l'existence d'une unique solution forte $u \in \mathcal{C}^0([0, T[, L^3)$, avec $T = +\infty$ si $\|u_0\|_{L^3} \ll 1$. On s'intéresse ici à l'existence de solutions fortes globales et à leur comportement asymptotique en temps.

Cet exposé reprend une partie de mes travaux de thèse [16], partiellement publiés [15] dans le cas de l'équation de Navier-Stokes dans une bande tridimensionnelle.

Les études précédentes sur les fluides tournants sont dues, par exemple, à Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier [4] ou à Babin, Mahalov et Nikolaenko [1] et montrent qu'à rotation rapide, $|\Omega|$ tendant vers l'infini, les solutions de (1) convergent vers un modèle bidimensionnel, indépendant de z . A rotation Ω fixée, nous verrons que le comportement asymptotique en temps de (1) vérifie le même type de propriétés et est régi par la partie bidimensionnelle de l'équation. Il convient donc de rappeler les résultats existants sur le comportement asymptotique en temps de l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla u)u &= \Delta u - \nabla p, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ \text{div } u &= 0 \\ u(x, 0) &= \bar{u}_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

où $u : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$. Des résultats successifs dus à Wiegner [19], Carpio [2], Schonbeck [17] ou Gallay et Wayne [9] montrent avec des méthodes différentes l'importance du Vortex d'Oseen dans le comportement en temps de la solution.

Précisons le plan de cet exposé. Dans une première partie, on introduit quelques idées importantes qui servent ensuite pour étudier l'existence et le comportement asymptotique en temps de (1). On rappelle notamment les résultats connus sur (2) et l'approche développée par Th. Gallay et C.E Wayne. Dans les deux parties suivantes, on met en œuvre ces idées pour une donnée initiale u_0 petite (partie 2) puis quelconque (partie 3).

1 Etude heuristique

1.1 Rappels sur l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^2$

Dans le cas particulier d'une solution u de (1) bidimensionnelle (c'est-à-dire indépendante de z), horizontale (c'est-à-dire $u = (u_1, u_2, 0)^T$) et sans rotation ($\Omega = 0$), l'équation (1) peut être assimilée à l'équation (2) dont le comportement asymptotique en temps a été étudié par Th. Gallay et C.E Wayne [9]. Leur idée est de développer une approche issue de la théorie des systèmes dynamiques; ils montrent qu'il existe des variétés invariantes de dimension finie dans le plan de phase de cette équation et que toute solution, au voisinage de l'origine, approche une de ces variétés à un taux qui peut être facilement calculé lorsque le temps t devient infini.

Afin de mettre en œuvre cette approche dynamique, ils utilisent deux techniques: la formulation en tourbillon et les variables d'échelle dont nous expliquons tour à tour l'intérêt.

Il est connu que la décroissance en temps de la solution $u(x, t)$ de (2) est affectée par la décroissance en espace de $\bar{u}_0$. Par exemple, si $\bar{u}_0 \in L^1 \cap L^2$ alors la solution $u(t)$ de (2) dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ a une norme décroissant comme $1/\sqrt{t}$. Par contre, si $\bar{u}_0$ satisfait, de plus, $\int_{\mathbf{R}^2} (1+|x|)|\bar{u}_0(x)|dx < \infty$, alors la norme L^2 de $u(t)$ décroît comme $1/t$. Malheureusement, cette condition qui place u dans un espace de Lebesgue à poids n'est pas préservée par l'évolution de (2) car la décroissance à l'infini en x de $u(x, t)$ dépend essentiellement de la contrainte d'incompressibilité $\text{div } u = 0$. Le comportement asymptotique en temps de $u(t)$ dépend alors de l'instant initial que l'on choisit... ce qui est facheux.

Pour contourner ce problème, on utilise la formulation en tourbillon qui consiste à travailler sur la fonction $\omega = \text{rot } u$ au lieu de la vitesse u . Si la condition initiale ω_0 est dans un espace de Lebesgue à poids, alors il en est de même pour la solution $\omega(t)$ à tout temps $t > 0$. La condition de décroissance à l'infini en x , dont dépend le comportement asymptotique en temps, est donc préservée par l'évolution en tourbillon. Bien sûr, supposer ω_0 dans un espace de Lebesgue à poids est une hypothèse forte de décroissance à l'infini en x pour $\omega(t)$ mais physiquement réaliste.

Cette formulation en tourbillon a également l'avantage d'éliminer la pression sans avoir recours au projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle. Enfin, l'étude sur ω permet d'obtenir des informations sur u puisque ces deux formulations sont formellement équivalentes: u peut être donnée en fonction de ω par la loi de Biot-Savart. Celle-ci s'écrit dans $\mathbf{R}^2$ sous la forme du noyau intégral:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y) dy, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad x^\perp = (-x_2, x_1).$$

Avant de poursuivre, notons que dans le cas (2), ω vérifie l'équation scalaire suivante

$$\begin{aligned}\partial_t \omega + (u \cdot \nabla_\xi) \omega &= \Delta \omega, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ \omega(x, 0) &= \omega_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^2 \\ \omega &= \text{rot } u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1\end{aligned}\tag{3}$$

où $\omega : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. On étudie cette équation dans l'espace L^2 à poids défini pour $m > 0$ par

$$\begin{aligned}L_{2D}^2(m) &= \{f \in L^2(\mathbf{R}^2) \mid \|f\|_m < \infty\} \\ \|f\|_m^2 &= \int_{\mathbf{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

La deuxième technique utilisée par Th. Gallay et C.E Wayne pour mettre en œuvre leur point de vue dynamique sur (2) est l'utilisation de variables d'échelle. En effet, si on linéarise l'équation (3) ci-dessus autour de 0, l'opérateur linéaire obtenu (le laplacien dans $L^2(\mathbf{R}^2)$) a un spectre continu de $-\infty$ jusqu'à 0 et on ne sait pas (même pour le problème linéaire) comment construire les variétés invariantes dans ce cas. L'idée, déjà développée pour les équations paraboliques, est de créer artificiellement un trou spectral à l'aide de variables d'échelle.

Soit donc les nouvelles variables

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}, \quad \tau = \log(1+t)$$

associées aux nouvelles fonctions

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \\ \omega(x, t) &= \frac{1}{1+t} w\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right)\end{aligned}$$

où w et v sont encore reliées par la loi de Biot-Savart. Alors w vérifie l'équation

$$\begin{aligned}\partial_t w + (v \cdot \nabla_\xi) w &= \mathcal{L}w, \quad \xi \in \mathbf{R}^2, \quad \tau > 0 \\ w(\xi, 0) &= w_0(\xi) \\ w &= \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\end{aligned}\tag{4}$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur de type Focker-Planck donné par

$$\mathcal{L} = \Delta_\xi + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla_\xi) + 1.$$

$\mathcal{L}$ possède alors d'intéressantes propriétés spectrales dans l'espace $L_{2D}^2(m)$: son spectre est constitué d'un ensemble discret de valeurs propres de multiplicité finie $\{-\frac{k}{2}, k \in \mathbf{N}\}$ et d'un spectre continu inclus dans $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(\lambda) < \frac{1-m}{2}\}$ qui peut être poussé arbitrairement loin sur la gauche du plan complexe par un choix judicieux du poids m .

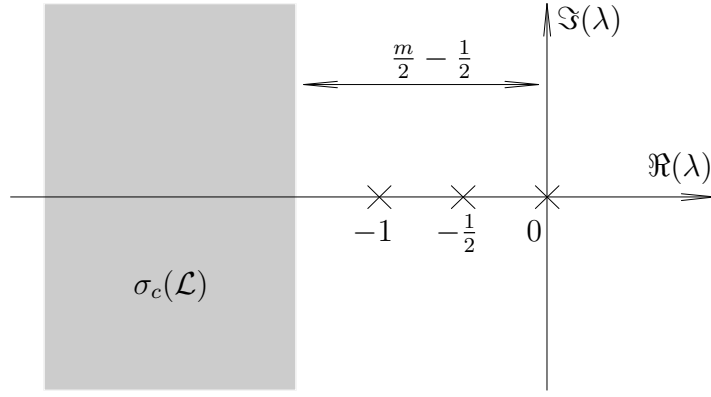


Fig. 1. Le spectre de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ dans $L_{2D}^2(m)$ lorsque $m = 4$.

Notamment, la valeur propre 0 est simple, associée au vecteur propre

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$$

dont la vitesse correspondante $\mathbf{v}^G$ est le Vortex d'Oseen. La valeur propre $-1/2$ est double et associée aux vecteurs propres

$$F_1(\xi) = \frac{\xi_1}{2} G(\xi) \text{ et } F_2(\xi) = \frac{\xi_2}{2} G(\xi).$$

En restreignant l'étude de (2) à une variété invariante de dimension finie dans $L_{2D}^2(m)$, Th. Gallay et C.E Wayne montrent que pour tout $\mu > 0$ tel que $2\mu \notin \mathbf{N}$, le comportement asymptotique en temps des solutions $w(\tau)$ de (4) jusqu'à un ordre $O(e^{-\mu\tau})$ est donné par un système fini d'EDO ayant une partie linéaire simple et une non-linéarité quadratique. En pratique, ils montrent que

Théorème 1.1 (Th. Gallay & C.E Wayne) Soit $\mu \in (0, \frac{1}{2})$. Il existe deux constantes strictement positives r et C telles que pour toute donnée initiale $w_0 \in L_{2D}^2(2)$ avec $\|w_0\|_2 \leq r$, l'équation (2) admet une unique solution $w \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, L_{2D}^2(2))$ avec $w(0) = w_0$. De plus,

$$\|w(\tau) - \alpha G\|_2 \leq C e^{-\mu\tau}, \quad \tau \geq 0$$

où $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} w_0(\xi) d\xi$.

Soit maintenant $\mu \in (\frac{1}{2}, 1)$. Alors, il existe de même des constantes strictement positives r et C telles que pour toute donnée initiale $w_0 \in L_{2D}^2(3)$ avec $\|w_0\|_3 \leq r$, l'équation (2) admet une unique solution $w \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, L_{2D}^2(3))$ avec $w(0) = w_0$. De plus,

$$\|w(\tau) - \alpha G - (\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2) e^{-\frac{\tau}{2}}\|_3 \leq C e^{-\mu\tau}, \quad \tau \geq 0$$

où $\beta_i = \int_{\mathbf{R}^2} \xi_i w_0(\xi) d\xi$, $i = 1$ ou 2 .

1.2 Ce qui change pour l'équation de Navier-Stokes Coriolis dans $\mathbf{R}^2 \times (0, 1)$

Revenons maintenant à notre équation de Navier-Stokes Coriolis dans une bande tridimensionnelle et regardons comment ces idées générales peuvent s'y appliquer ou se compliquer. On rappelle l'équation (1) en vitesse:

$$\begin{aligned}\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \Omega e_3 \wedge u &= \Delta u - \nabla p, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(x, z + 1, t) &= u(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0 \\ u(x, z, 0) &= u_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1).\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que celles développées dans la partie 1.1 ci-dessus, on choisit de travailler avec le tourbillon

$$\omega = \operatorname{rot} u = \nabla \wedge u.$$

Le problème étant ici tridimensionnel, ω est une fonction à valeurs *vectérielles* et vérifie l'équation vectorielle suivante:

$$\begin{aligned}\partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u + \Omega \partial_z u &= \Delta \omega, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t > 0 \\ \omega &= \operatorname{rot} u, \quad \operatorname{div} u = 0 \\ \omega(x, z + 1, t) &= \omega(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0 \\ \omega(x, z, 0) &= \omega_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1).\end{aligned} \tag{5}$$

Notons que le terme non-linéaire comporte un terme quadratique supplémentaire et que le terme de rotation se traduit par un opérateur intégro-différentiel. En effet, la vitesse se traduit de nouveau en fonction du tourbillon à l'aide de la loi de Biot-Savart.

Ecrire la loi de Biot-Savart dans la bande avec des conditions périodiques au bord consiste à résoudre le système suivant:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} u &= \omega \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ \omega(x, z + 1) &= \omega(x, z) \text{ et } u(x, z + 1) = u(x, z).\end{aligned}$$

Ceci n'étant pas connu dans la littérature, on décompose les fonctions u et ω sous la forme d'une partie bidimensionnelle (indépendante de z) et d'une partie tridimensionnelle, 1-périodique en z et à moyenne verticale nulle:

$$\begin{aligned}\omega(x, z) &= \bar{\omega}(x) + \tilde{\omega}(x, z), \quad u(x, z) = \bar{u}(x) + \tilde{u}(x, z), \\ \int_0^1 \tilde{\omega}(x, z) dz &= 0, \quad \int_0^1 \tilde{u}(x, z) dz = 0, \\ \tilde{\omega} &\text{ 1-périodique en } z, \quad \tilde{u} \text{ 1-périodique en } z\end{aligned} \tag{6}$$

On associe à cette décomposition les projecteurs $\bar{R}$ et $\tilde{R}$ définis par $\bar{R}w = \bar{w}$ et $\tilde{R}w = \tilde{w}$. Le système précédent se décompose alors en deux systèmes indépendants ayant chacun

leur loi de Biot-Savart:

$$(a) \begin{cases} \bar{\omega}, \bar{u} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{u} = \bar{\omega} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \tilde{\omega}, \tilde{u} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \text{ 1-périodique en } z \\ \int_0^1 \tilde{\omega}(x, z) dz = \int_0^1 \tilde{u}(x, z) dz = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{u} = 0 \\ \operatorname{rot} \tilde{u} = \tilde{\omega} \end{cases}$$

Le système (a) se divise de nouveau en deux systèmes indépendants

$$\begin{cases} \partial_1 \bar{u}_1 + \partial_2 \bar{u}_2 = 0 \\ \partial_1 \bar{u}_2 - \partial_2 \bar{u}_1 = \bar{\omega}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\omega}_1 = \partial_2 \bar{u}_3 \\ \bar{\omega}_2 = -\partial_1 \bar{u}_3 \end{cases}$$

Celui pour $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ et $\bar{\omega}_3$ se résout à l'aide de la loi de Biot-Savart pour (2). Celui pour $\bar{u}_3$, $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ à l'aide de la solution fondamentale du laplacien. Le système (b) se résout par passage aux coefficients de Fourier, la convention étant ici de prendre la transformée de Fourier dans $\mathbf{R}^2$ pour les variables horizontales et les séries de Fourier pour la variable verticale:

$$\begin{aligned} f(x, z) &= \int_{\mathbf{R}^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n(k) e^{i(k \cdot x + 2\pi n z)} dk \\ f_n(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \int_0^1 f(x, z) e^{-i(k \cdot x + 2\pi n z)} dz dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Notons pour préciser le vocabulaire que $\tilde{u} = 0$ correspond au *cas bidimensionnel* et $u_3 = 0$ au *cas horizontal*.

Pour poursuivre la démarche initiée dans $\mathbf{R}^2$, on souhaite utiliser les variables d'échelle. Cependant, le domaine n'étant pas invariant par le changement d'échelle classique pour l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^3$, on décide de laisser la variable z inchangée en posant

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\sqrt{1+t}}, \quad z \text{ inchangée}, \quad \tau = \log(1+t), \\ \omega(x, z, t) &= \frac{1}{1+t} w\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, z, \log(1+t)\right), \\ u(x, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, z, \log(1+t)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

w et v sont encore reliées par la loi de Biot-Savart. Le tourbillon en variables d'échelle w vérifie alors l'équation

$$\begin{aligned} \partial_\tau w &= \Lambda(\tau)w - \Omega e^{\frac{3\tau}{2}} \partial_z v + N(w), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad \tau > 0 \\ w &= \nabla_\tau \wedge v, \quad \nabla_\tau \cdot v = 0 \\ w(\xi, z+1, \tau) &= w(\xi, z, \tau), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \tau \geq 0 \\ w(\xi, z, 0) &= w_0(\xi, z), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \end{aligned} \quad (9)$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_\tau &= (\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, e^{\frac{\tau}{2}} \partial_z) \\ \Lambda(\tau) &= \mathcal{L}_\xi + e^\tau \partial_z^2 \\ N(w) &= (w \cdot \nabla_\tau) v - (v \cdot \nabla_\tau) w. \end{aligned}$$

Puisque la variable verticale z reste inchangée, l'équation (9) vérifiée par w n'est plus autonome et l'opérateur linéaire dépend du temps. De plus, le terme de rotation n'a pas le bon scaling. Ces inconvénients majeurs sont cependant atténués car toutes les dépendances en temps n'apparaissent qu'avec des dérivées verticales. La projection de (9) sur l'ensemble des fonctions bidimensionnelles (c'est-à-dire indépendantes de z) est donc une équation autonome, sans terme de rotation et avec un opérateur linéaire indépendant du temps:

$$\partial_\tau w + (v \cdot \nabla_\xi)w = \mathcal{L}_\xi w.$$

Cette équation bidimensionnelle joue un rôle capital dans le comportement asymptotique en temps des solutions de (9). En effet, une étude heuristique de l'opérateur linéaire $\Lambda(\tau) = \mathcal{L}_\xi + e^\tau \partial_z^2$ montre qu'il génère une famille d'opérateurs d'évolution

$$S(\tau, \sigma) = e^{(\tau-\sigma)\mathcal{L}} \circ e^{(e^\tau - e^\sigma)\partial_z^2} \quad (10)$$

dont l'expression en Fourier est pour tout $k \in \mathbf{R}^2$, $n \in \mathbf{Z}$ et $f \in L^2(\mathbf{R}^2 \times (0, 1))$,

$$(S(\tau, \sigma)f)_n(k) = e^{-a(\tau-\sigma)|k|^2} e^{-4\pi^2(e^\tau - e^\sigma)n^2} f_n\left(ke^{-\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)}\right)$$

où $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$. Si $f = \tilde{R}w_0 = \tilde{w}_0$, $(S(\tau, \sigma)f)_0 \equiv 0$ car $\int_0^1 \tilde{w}_0 dz = 0$. De plus, pour $n \in \mathbf{Z}^*$, le terme $e^{-4\pi^2(e^\tau - e^\sigma)n^2}$ converge vers 0 lorsque τ tend vers l'infini. Donc $\tilde{w}(\tau)$ tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. Si $f = \bar{R}w_0 = \bar{w}_0$, alors $S(\tau, \sigma)\bar{w}_0 = e^{(\tau-\sigma)\mathcal{L}}\bar{w}_0$, et ceci correspond à l'étude bidimensionnelle présentée en 1.1. Le comportement asymptotique en temps est donc donné par la partie bidimensionnelle $\bar{w}$ de la solution. On remarquera ici l'importance de la viscosité verticale (ici rééchelonnée à 1) qui intervient dans le terme $e^{-4\pi^2(e^\tau - e^\sigma)n^2}$. En l'absence de viscosité verticale (dans le cas d'une viscosité anisotrope par exemple), ce terme disparaît et le comportement asymptotique de la solution w n'est plus aussi clair.

Enfin, pour clore ce premier paragraphe, il convient de définir les espaces L^2 à poids utilisés:

$$L^2(m) = \{f(\xi, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid f \text{ est 1-périodique en } z, \|f\|_m < \infty\} \quad (11)$$

avec

$$\|f\|_m = \left(\int_{\mathbf{R}^2} \int_0^1 (1 + |\xi|^2)^m |f(\xi, z)|^2 dz d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que contrairement aux habitudes pour l'équation de Navier-Stokes, la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} u = 0$ n'est pas incluse dans la définition de l'espace utilisé.

2 Etude à donnée petite

Le but de cette partie est de mettre en œuvre les idées présentées dans la partie 1 pour établir l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation (1) de Navier-Stokes Coriolis. Les méthodes développées ici ne concernent que l'équation (1) à donnée initiale u_0 petite et sont valables avec ou sans terme de rotation.

2.1 Théorème d'existence

Un théorème d'existence et d'unicité de solutions fortes de l'équation de (1) à donnée initiale petite s'établit de manière classique à l'aide d'un théorème de point fixe sur l'équation intégrale dans $L^2(m)$. Ce théorème nécessite des estimations quadratiques sur le terme non-linéaire. On ne peut donc pas traiter le terme de rotation comme un terme non-linéaire à moins d'ajouter une hypothèse de petitesse sur la rotation Ω , ce qu'on ne souhaite pas. La parade classique consiste à inclure le terme de rotation dans l'opérateur linéaire en définissant

$$\mathcal{M}(\tau)w = \Lambda(\tau)w - \Omega e^{\frac{3\tau}{2}} \partial_z v$$

où v est donnée en fonction de w par la loi de Biot-Savart. Ce nouvel opérateur dépendant du temps vérifie les mêmes propriétés que $\Lambda(\tau)$ expliquées de manière heuristique au 1.2. Notamment, il est générateur d'une famille d'opérateurs d'évolution $\mathcal{S}(\tau, \sigma)$ dont on connaît de bonnes estimations via un calcul explicite avec la transformée de Fourier. L'équation intégrale associée à (9) s'écrit

$$w(\tau) = \mathcal{S}(\tau, 0)w_0 + \int_0^\tau \mathcal{S}(\tau, \sigma)N(w)(\sigma)d\sigma.$$

Pour estimer le terme non-linéaire N , on doit gérer les dérivées du terme non-linéaire et les facteurs exponentiels en temps. On obtient alors le terme d'existence suivant.

Théorème 2.1 *Soit $m > 1$. Il existe $r > 0$ tel que pour toute donnée initiale $w_0 \in L^2(m)$ vérifiant $\operatorname{div} w_0 = 0$ et $\|w_0\|_m \leq r$, l'équation (9) a une unique solution $w \in \mathcal{C}^0([0, +\infty); L^2(m))$ avec $w(0) = w_0$ et pour tout $\tau \geq 0$, $\nabla_\tau \cdot w(\tau) = 0$. De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|w(\tau)\|_m \leq C\|w_0\|_m, \quad \tau \geq 0. \quad (12)$$

2.2 Comportement asymptotique

Une fois acquise l'existence et l'unicité d'une solution forte globale en temps, on peut s'intéresser à son comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini. On met ici en œuvre la théorie des systèmes dynamiques expliquée plus haut. On étudie notamment $\Lambda(\tau)$ l'opérateur linéarisé autour de 0. D'après l'écriture (10), il est clair que deux échelles de temps différentes coexistent. Les variations horizontales en ξ évoluent en $O(e^{-\tau})$ quand les variations verticales en z sont beaucoup plus rapides en $O(e^{-e^\tau})$. La partie à moyenne verticale nulle $\tilde{w}$ de la solution tend donc extrêmement vite vers 0 et le comportement asymptotique en temps est donné par la partie bidimensionnelle $\bar{w}$ de la solution.

Le semi-groupe important est donc $e^{\tau\mathcal{L}}$ et son étude dans $\bar{R}(L^2(m))$ se déduit de celle de $e^{\tau\mathcal{L}}$ dans $L^2_{2D}(m)$. En effet, le spectre de $\mathcal{L}$ dans $\bar{R}(L^2_{2D}(m))$ est encore donné par un ensemble de valeurs propres discrètes de multiplicité finie et d'un spectre continu qui peut être poussé arbitrairement loin de l'origine par un choix judicieux du poids m . La valeur propre 0 est encore simple et associée au vecteur propre

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G(\xi) \end{pmatrix}.$$

Cependant, la valeur propre $-1/2$ est ici d'ordre 3 et associée aux vecteurs propres

$$\mathbf{F}_1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\xi) = \begin{pmatrix} -F_2(\xi) \\ F_1(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On est maintenant en mesure d'écrire un développement asymptotique jusqu'à l'ordre 2 en exprimant la solution w dans une base adaptée à cette décomposition spectrale. L'équation (9) se réduit alors à un système fini d'EDO et d'EDP dont les opérateurs linéaires sont bien connus.

Etude à l'ordre 1: Soit $w \in L^2(m)$ la solution de (9) donnée par le théorème 2.1. On décompose w sous la forme

$$\begin{aligned} w(\xi, z, \tau) &= \bar{R}w(\xi, \tau) + \tilde{R}w(\xi, z, \tau) \\ &= \bar{w}(\xi, \tau) + \tilde{w}(\xi, z, \tau) \\ &= \alpha(\tau)\mathbf{G}(\xi) + q_0(\xi, \tau) + \tilde{w}(\xi, z, \tau) \end{aligned}$$

où $\alpha(\tau) = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} w_3(\xi, z, \tau) d\xi dz$. Un calcul explicite montre que l'équation (9) est équivalente au système

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0 \\ \partial_\tau q_0 &= \mathcal{L}q_0 + Q_0(N(w)) \\ \partial_\tau \tilde{w} &= \mathcal{M}(\tau)\tilde{w} + \tilde{R}(N(w)) \end{aligned}$$

où Q_0 est le projecteur spectral adéquat. Les arguments heuristiques expliqués précédemment et l'étude bidimensionnelle rappelée en première partie 1.1 donnent

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \alpha(0) \\ q_0(\tau) &= O(e^{-\mu\tau}) \text{ pour } 0 < \mu < 1/2 \\ \tilde{w}(\tau) &= O(e^{-e^\tau}). \end{aligned}$$

On obtient plus précisément le théorème suivant:

Théorème 2.2 *Soit $0 < \mu < 1/2$ et $m > 1 + 2\mu$. Il existe $r > 0$ tel que pour toute donnée initiale $w_0 \in L^2(m)$ telle que $\operatorname{div} w_0 = 0$ et $\|w_0\|_m \leq r$, l'équation (9) a une unique solution globale $w \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, L^2(m))$ avec $w(0) = w_0$ et pour tout $\tau \geq 0$, $\nabla_\tau \cdot w(\tau) = 0$. De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|w(\tau) - \alpha\mathbf{G}\|_m \leq Ce^{-\mu\tau}\|w_0\|_m, \quad \tau \geq 0$$

où $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} (w_0)_3 d\xi dz$.

Ce théorème montre donc que le comportement asymptotique de u est bidimensionnel et horizontal au premier ordre. Il est à noter que ce résultat est valable avec ou sans rotation. Par contre, il n'a pas été établi la façon dont la rotation influence cette convergence et notamment la dépendance de la constante C en Ω .

Etude à l'ordre 2: Dans le cas des solutions d'énergie finie, c'est-à-dire quand $v \in L^2(\mathbf{R}^2 \times (0, 1))$, on a $\alpha = 0$ et le comportement asymptotique doit être précisé à l'ordre suivant. On décompose dans ce cas la solution sous la forme

$$\begin{aligned} w(\xi, z, \tau) &= \bar{R}w(\xi, \tau) + \tilde{R}w(\xi, z, \tau) \\ &= \bar{w}(\xi, \tau) + \tilde{w}(\xi, z, \tau) \\ &= \alpha(\tau)\mathbf{G}(\xi) + \sum_{i=1}^3 \beta_i(\tau)\mathbf{F}_i(\xi) + q_1(\xi, \tau) + \tilde{w}(\xi, z, \tau) \end{aligned}$$

où $\beta_i(\tau) = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} \xi_i w_3(\xi, z, \tau) d\xi dz$ pour $i = 1$ ou 2 et $\beta_3(\tau) = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} \frac{1}{2}(\xi_1(w_0)_2 - \xi_2(w_0)_1) d\xi dz$. (9) est alors équivalente au système

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0 \\ \dot{\beta}_i &= -\frac{1}{2}\beta_i \\ \partial_\tau q_1 &= \mathcal{L}q_1 + Q_1(N(w)) \\ \partial_\tau \tilde{w} &= \mathcal{M}(\tau)\tilde{w} + \tilde{R}(N(w)) \end{aligned}$$

où Q_1 est le projecteur spectral adéquat. Ceci donne

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \alpha(0) = 0 \\ \beta_i(\tau) &= \beta_i(0)e^{-\tau/2} = \beta_i e^{-\tau/2} \\ q_1(\tau) &= O(e^{-\nu\tau}) \text{ pour } 1/2 < \nu < 1 \\ \tilde{w}(\tau) &= O(e^{-e^\tau}). \end{aligned}$$

D'où le théorème suivant énonçant le comportement asymptotique de w à l'ordre 2:

Théorème 2.3 *Soit $1/2 < \nu < 1$ et $m > 1 + 2\nu$. Il existe $r > 0$ tel que pour toute donnée initiale $w_0 \in L^2(m)$ telle que $\operatorname{div} w_0 = 0$ et $\|w_0\|_m \leq r$, l'équation (9) a une unique solution globale $w \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, L^2(m))$ avec $w(0) = w_0$ et pour tout $\tau \geq 0$, $\nabla_\tau \cdot w(\tau) = 0$. De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|w(\tau) - \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{F}_i e^{-\frac{\tau}{2}}\|_m \leq C e^{-\nu\tau} \|w_0\|_m, \quad \tau \geq 0$$

où $\beta_i = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} \xi_i(w_0)_3 d\xi dz$ pour $i = 1$ ou 2 et $\beta_3(\tau) = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} \frac{1}{2}(\xi_1(w_0)_2 - \xi_2(w_0)_1) d\xi dz$.

Le comportement asymptotique est donc à cet ordre toujours bidimensionnel mais n'est plus horizontal. C'est ce phénomène particulier qui distingue les cas des conditions aux limites stress-free et périodiques. Le cas stress-free entraîne en effet un résultat similaire à (2) avec un comportement asymptotique bidimensionnel et horizontal à tous les ordres.

3 Etude à donnée quelconque

Le but de cette dernière partie est de reprendre les résultats de la partie 2 en s'affranchissant de l'hypothèse de petitesse sur la donnée initiale. Les méthodes développées précédemment,

tant pour l'existence que pour le comportement asymptotique des solutions, ne conviennent plus. Le théorème de point fixe comme la linéarisation autour de 0 requièrent une hypothèse de petitesse de la condition initiale de manière incontournable.

On utilise donc de nouvelles idées pour mener à bien ces projets à donnée initiale quelconque. Le théorème d'existence emprunte des idées dues à Chemin, Desjardins, Grenier et Gallagher [4] utilisant des estimations de dispersion et de Strichartz pour une rotation suffisamment rapide. Le résultat du comportement asymptotique fait par contre appel à l'ensemble ω -limite de la trajectoire, le principe d'invariance de LaSalle, des fonctionnelles de Lyapunov et un résultat analogue de Th. Gallay et C.E. Wayne dans $\mathbf{R}^2$ [10].

3.1 Théorème d'existence

On revient ici à la formulation en vitesse et dans les variables originales $u(x, z, t)$. On rappelle que (1) s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t u + P((u \cdot \nabla)u) + P(\Omega e_3 \wedge u) &= \Delta u, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u(x, z + 1, t) &= u(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0 \\ u(x, z, 0) &= u_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \end{aligned} \quad (13)$$

où P est le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle. Comme précisé dans l'introduction, cette équation possède la même estimation d'énergie que l'équation habituelle de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^3$. Il n'y a donc aucun espoir de démontrer un résultat d'existence et d'unicité de (13) en trois dimensions à partir de là... à moins de savoir résoudre l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^3$!! L'idée principale est d'utiliser de manière cruciale le terme de rotation.

On sait qu'il y a convergence, lorsque t tend vers l'infini, vers la solution du problème bidimensionnel notée précédemment $\bar{u}$, solution de

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + P((\bar{u} \cdot \nabla_x) \bar{u}) &= \Delta_x \bar{u}, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ \operatorname{div}_x \bar{u} &= 0 \\ \bar{u}(x, 0) &= \bar{u}_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

L'existence globale de cette solution est connue grâce à l'égalité d'énergie

$$\|\bar{u}(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla \bar{u}(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2 ds = \|\bar{u}_0\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2.$$

L'idée est alors d'étudier la différence $u - \bar{u}$ et d'en déduire l'existence globale de u . Cependant, une fois encore, toute estimation d'énergie sur $u - \bar{u}$ ignore le terme de rotation et ne donne pas satisfaction. L'idée de Chemin, Desjardins, Grenier et Gallagher [4] est en fait de regarder la différence $u - \bar{u} - U_F$ où U_F est solution de l'équation libre de rotation

$$\begin{aligned} \partial_t U_F + P(\Omega e_3 \wedge U_F) &= \Delta U_F, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t \geq 0 \\ \operatorname{div} U_F &= 0 \\ U_F(x, z + 1, t) &= U_F(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0. \\ U_F(x, z, 0) &= \tilde{u}_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1). \end{aligned} \quad (15)$$

L'existence globale de cette équation est, là encore, connue par l'inégalité d'énergie

$$\|U_F(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla U_F(s)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 ds \leq \|\tilde{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2.$$

L'intérêt de cette équation est de traduire la rotation à travers des estimations de Strichartz sur une troncature en fréquence de U_F . Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\chi(\lambda) = 1$ pour $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ et $\chi(\lambda) = 0$ pour $|\lambda| \geq 1$. Pour un $R > 0$ à déterminer plus tard, on définit

$$U = \chi \left(\frac{|k, n|}{R} \right) U_F$$

qui se traduit en Fourier pour tout $(k, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{Z}$ par

$$U_n(k) = \chi \left(\frac{\sqrt{|k|^2 + 4\pi^2 n^2}}{R} \right) U_{Fn}(k).$$

Les estimations de Strichartz s'écrivent alors pour tout $p \in [1; +\infty]$,

$$\|U\|_{L^p(\mathbf{R}^+, L^\infty(\mathbf{R}^2 \times (0,1)))} \leq C |\Omega|^{-\frac{1}{4p}} \|U(0)\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times (0,1))}.$$

Cette inégalité s'obtient de manière classique par des estimations de dispersion et un argument de type TT^* .

En notant $\delta = u - \bar{u} - U$, δ vérifie l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle suivante:

$$\begin{aligned} \partial_t \delta + P(\Omega e_3 \wedge \delta) &= \Delta \delta + F, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad t > 0 \\ \operatorname{div} \delta &= 0 \\ \delta(x, z, 0) &= (1 - \chi) \tilde{u}_0(x, z), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \\ \delta(x, z + 1, t) &= \delta(x, z, t), \quad (x, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

dont le terme de force F et la condition initiale $(1 - \chi) \tilde{u}_0$ sont petits par choix de Ω et R suffisamment grands. Par un argument "à la Kato", on conclut alors à l'existence globale de δ et en remontant le raisonnement, on obtient celle de u . Précisément, on a le théorème suivant:

Théorème 3.1 *Soit $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$. Il existe $\Omega_0 > 0$ tel que pour tout $\Omega \in \mathbf{R}$ avec $|\Omega| \geq \Omega_0$, l'équation (1) a une unique solution globale*

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2(\mathbf{R}^+, \dot{H}^{\frac{3}{2}}).$$

3.2 Comportement asymptotique

Pour cette dernière partie, on utilise de nouveau la formulation en tourbillon et les variables d'échelle. On rappelle que l'équation (1) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \partial_\tau w &= \mathcal{M}(\tau)w + N(w), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1), \quad \tau > 0 \\ w &= \nabla_\tau \wedge v, \quad \nabla_\tau \cdot v = 0 \\ w(\xi, z, 0) &= w_0(\xi, z), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, 1) \\ w(\xi, z + 1, \tau) &= w(\xi, z, \tau), \quad (\xi, z) \in \mathbf{R}^3, \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Bien qu'encore incapable d'écrire un résultat d'existence et de comportement asymptotique global indépendant de la rotation, on sait cependant montrer que

Théorème 3.2 *Soit $m > 1$ et $w \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, L^2(m))$ une solution de (9) uniformément bornée en temps dans $L^2(m)$ avec $w(0) = w_0$. Alors,*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|w(\tau) - \alpha \mathbf{G}\|_m = 0$$

où $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} (w_0)_3 d\xi dz$.

Donnons maintenant les grandes étapes de la preuve de ce théorème.

Compacité: La première étape consiste à montrer que la trajectoire $\{w(\tau)\}_{\tau \geq 0}$ est relativement compacte dans $L^2(m)$. Les outils utilisés sont la régularisation parabolique de l'équation et l'injection compacte de $H^1(m+1)$ dans $L^2(m)$. On peut alors définir l'ensemble ω -limite de cette trajectoire:

$$\mathcal{O} = \{W : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid \exists \tau_n \rightarrow +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w(\tau_n) - W\|_m = 0\}.$$

$\mathcal{O}$ est donc compact, connexe et non vide.

Propriétés de $\mathcal{O}$: Utilisant les arguments développés dans la partie 1.2, on montre que si $w = \bar{w} + \tilde{w}$, alors $\tilde{w}$ tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. $\mathcal{O}$ ne contient donc que des fonctions indépendantes de z , soit $\tilde{R}(\mathcal{O}) = \{0\}$. De plus, un calcul direct montre que $\mathcal{O}$ est globalement invariant par l'évolution de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_\tau W + (W \cdot \nabla_\xi) V - (V \cdot \nabla_\xi) W &= \mathcal{L}_\xi W \\ \operatorname{div} V &= 0, \quad W = \operatorname{rot} V \\ W, V : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \end{aligned} \tag{16}$$

$\mathcal{O}$ est réduit à $\alpha \mathbf{G}$: Enfin, il reste à montrer que cet ensemble ω -limite est réduit à $\alpha \mathbf{G}$ avec $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} (w_0)_3 d\xi dz$.

Soit $W_0 \in \mathcal{O}$. Alors il existe une trajectoire complète $W(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$ de (16) avec $W(0) = W_0$ et $W(\tau) \in \mathcal{O}$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$. Comme $\tilde{R}(\mathcal{O}) = \{0\}$, W est indépendant de z , ainsi que la vitesse V associée. De même que dans la partie 1 pour la loi de Biot-Savart, le système vérifié par (W, V)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} V &= W \\ \operatorname{div} V &= 0 \end{aligned}$$

se décompose en deux systèmes indépendants (W_3, V_1, V_2) et (W_1, W_2, V_3) . Le premier système s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 &= W_3 \\ \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 &= 0 \end{aligned}$$

et W_3 est solution de l'équation (4) étudiée par Th. Gallay et C.E Wayne. D'après [10], on a alors $W_3 = \alpha G$ où $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} (W_0)_3 d\xi$. Le second système s'écrit

$$\begin{aligned} W_1 &= \partial_2 V_3 \\ W_2 &= -\partial_1 V_3 \end{aligned}$$

et V_3 est solution de

$$\partial_\tau V_3 + \alpha(\mathbf{v}^G \cdot \nabla_\xi) V_3 = (\mathcal{L} - \frac{1}{2}) V_3, \quad \xi \in \mathbf{R}^2, \tau > 0.$$

Comme $m > 1$ et $W \in L^2(m)$, on peut montrer que $V_3 \in L^2(\mathbf{R}^2)$. Alors, la norme L^2 de V_3 vérifie

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V_3\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2 = - \int_{\mathbf{R}^2} |\nabla V_3|^2 d\xi \leq 0,$$

et la fonction $\Phi(W) = \|V_3\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2$ (où V et W sont reliées par la loi de Biot-Savart) décroît strictement le long des trajectoires de (16) sauf sur l'ensemble $\{W \in L^2(m) \mid V_3 = 0\}$ où Φ reste constante. Φ est donc une fonctionnelle de Lyapunov pour le flot de (16). Par le principe d'invariance de LaSalle, $V_3(\tau) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$ et par suite, $W_1(\tau) = W_2(\tau) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbf{R}$.

Finalement, $W(\tau) = \alpha \mathbf{G}$ est indépendant du temps et $W_0 = \alpha \mathbf{G}$ avec $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} (W_0)_3 d\xi$. Or $W_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} w(\tau_n)$ où τ_n est une suite croissante vers l'infini. Donc $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2 \times (0,1)} (w_0)_3 d\xi dz$ car cette moyenne est préservée par le flot de (9). On a donc montré que $W_0 = \alpha \mathbf{G}$ et que l'ensemble ω -limite de $w(\tau)$ est réduit à $\alpha \mathbf{G}$. Ceci conclut la démonstration du théorème.

Conclusion

Nous avons donc présenté successivement pour l'équation de Navier-Stokes Coriolis (1) dans une bande tridimensionnelle l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions fortes globales et du comportement asymptotique en temps, pour des conditions initiales petites ou non. Afin de rendre la troisième partie plus cohérente, il conviendrait d'unifier les résultats d'existence et de comportement asymptotique quant aux normes utilisées afin d'obtenir un théorème d'existence et de convergence globale analogue au théorème 2.2. Ce travail nécessiterait cependant une meilleure compréhension des estimations de dispersion et de Strichartz du 3.1.

Enfin, comme mentionné précédemment, il serait très intéressant de reprendre ces résultats avec une viscosité anisotrope, en permettant notamment à la viscosité verticale de s'annuler. Les arguments précédents à données petites et l'étude des opérateurs linéaires sont alors à reprendre avec d'autres méthodes.

References

- [1] BABIN A. & MAHALOV A. & NICOLAENKO B. Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains, *Indiana University Mathematics Journal*, **1999**, 48, 1133-1176.
- [2] CARPIO A. Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three. *Comm. Partial Differential Equations*, **1994**, 19(5-6), 827-872.
- [3] CHARVE F. Convergence de solutions faibles du système primitif des équations quasigeostrophiques, *Prépublication du CMLS de l'Ecole Polytechnique* 2003-04.

- [4] CHEMIN J.Y. & DESJARDINS B. & GALLAGHER I. & GRENIER E. Basics of Mathematical Geophysics, Prépublication du CMLS de l'Ecole Polytechnique 2004-04.
- [5] DESJARDINS B. & GRENIER E. On the homogeneous model of wind-driven ocean circulation, SIAM J. Appl. Math., **2000**, *60*, 43-60.
- [6] FUJITA H. & KATO T. On the Navier-Stokes initial value problem, Arch. Rational Mech. Anal., **1964**, *16* 269-315.
- [7] GALLAGHER I. Asymptotics of the solutions of hyperbolic equations with a skew-symmetric perturbation, J. of Diff. Eq., **1998**, *150*, 363-384
- [8] GIGA Y. & KAMBE T. Large time behavior of the vorticity of the two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. Commun. Math. Phys., **1988**, *117*(4), 549-568.
- [9] GALLAY T. & WAYNE C.E. Invariant Manifolds and the Long-Time Asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity Equations on $\mathbf{R}^2$. Arch. Rational Mech. Anal., **2002**, *163*(3), 209-258.
- [10] GALLAY T. & WAYNE C.E. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation, Prépublication de l'Institut Fourier, **2003**.
- [11] LERAY J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Mathematica, **1933**, *63*, 193-248.
- [12] IFTIMIÉ D. Approximation of the quasigeostrophic system with the primitiv system, Asymptotic Analysis, 1999, *21*, 89-97.
- [13] LIONS J.L & TEMAM R. & WANG S. Geostrophic asymptotics of the primitiv equations of the atmosphere, Topological Methods in Non Linear Analysis, **1994**, *4*, 1-35.
- [14] PEDLOVSKY J. Geophysical Fluid Dynamics, 2nd edition, Springer Verlag, NY, **1987**.
- [15] ROUSSIER V. Long-Time Asymptotics of Navier-Stokes and Vorticity equations in a three-dimensional Layer, à paraître dans Comm. Partial Differential Equations.
- [16] ROUSSIER-MICHON V. Sur la stabilité des Ondes Sphériques et le Mouvement d'un Fluide entre deux Plaques Infinies, Thèse de l'Université Paris XI Orsay, **2003**.
- [17] SCHONBEK M.E. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes Equations. Comm. Partial Differential Equations **1986**, *11*(7), 733-763.
- [18] TEMAM R. & ZIANE M. Navier-Stokes equations in thin spherical domains, Optimization methods in PDE's, Contemp. Math., **209**, Amer. Math. Soc., **1997**, 281-314
- [19] WIEGNER M. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^n$. J. Lond. Math. Soc., II Ser. **1987**, *35*(2), 303-313.