

# Une conjecture sur la torsion des classes de Chern des fibrés de Gauss-Manin \*

Vincent MAILLOT<sup>†</sup> et Damian RÖSSLER<sup>‡</sup>

**2010 Mathematics Subject Classification(s)** : 14D06, 14D07

**Keywords** : Adams-Riemann-Roch theorem, variation of Hodge structures, semi-stable, Abel-Jacobi map, Merkurjev-Suslin theorem

## Résumé

Pour tout  $t \in \mathbb{N}$  nous définissons un certain entier positif  $N_t$  et nous conjecturons que si  $H$  est un fibré de Gauss-Manin d'une fibration semi-stable, alors sa  $t$ -ième classe de Chern est annulée par  $N_t$ . Nous démontrons diverses conséquences de cette conjecture.

## 1 Introduction

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif de schémas lisses et quasi-projectifs sur un corps algébriquement clos  $K$  de caractéristique nulle. On suppose que  $Y$  est connexe. Soit  $D \hookrightarrow X$  et  $E \hookrightarrow Y$  des diviseurs à croisements normaux. On suppose que  $f$  est semi-stable relativement à  $D$  et  $E$ . Voir [28, Par. 1, Def. 1.1]

---

\*This article was originally submitted as an invited contribution to the special issue "Arithmetic Algebraic Geometry" (issue 45.1). Communicated by A. Tamagawa. Received February 17, 2009. Revised December 10, 2009, April 6, 2010, April 24, 2010.

<sup>†</sup>Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, C.N.R.S., Case Postale 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France, E-mail : vmaillot@math.jussieu.fr

<sup>‡</sup>Équipe d'Arithmétique et Géométrie Algébrique, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex, France, E-mail : damian.rossler@math.u-psud.fr

ou *infra* sous-section 2.1 pour la définition d'un diviseur à croisements normaux et d'un morphisme semi-stable.

On notera  $\Omega_{X/Y}^\bullet(\log)$  le complexe de de Rham logarithmique relatif de  $X$  au-dessus de  $Y$  relativement à  $D$  et  $E$ . Voir [28, Par. 1, Def. 1.3] ou *infra* sous-section 2.1 pour la définition de cette notion.

Pour tout  $j \geq 0$ , on écrira

$$H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log) := R^j f_*(\Omega_{X/Y}^\bullet(\log))$$

pour le  $j$ -ème fibré de Gauss-Manin logarithmique relativement à  $f$ ,  $D$  et  $E$ . On peut montrer que  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)$  est un faisceau localement libre de rang fini.

Enfin, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$N_t := \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ 2 \cdot \prod_{p-1|t} p^{\text{ord}_p(t)+1} & \text{si } t \text{ est pair et strictement positif,} \\ 2 & \text{si } t \text{ est impair,} \end{cases}$$

où sur la deuxième ligne,  $p$  parcourt l'ensemble des nombres premiers et  $\text{ord}_p(t)$  désigne la valuation  $p$ -adique de l'entier  $t$ . Le théorème de von Staudt montre que si  $t$  est pair et strictement positif, alors  $N_t/2$  est le dénominateur du nombre rationnel positif  $(-1)^{\frac{t+2}{2}} B_t/t$ , où  $B_t$  est le  $t$ -ième nombre de Bernoulli (cf. [37, Appendix B]). On rappelle que les nombres de Bernoulli  $B_t$  sont définis par l'identité de séries formelles :

$$\sum_{t \geq 0} B_t \frac{u^t}{t!} := \frac{u}{\exp(u) - 1}.$$

L'objet du présent article est de proposer la conjecture suivante :

**Conjecture 1.1.** *Pour tout entiers  $j$  et  $t$  positifs, l'égalité*

$$N_t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0$$

*est vérifiée dans  $\text{CH}^t(Y)$ .*

Ici,  $\text{CH}^t(Y)$  est le  $t$ -ième groupe de Chow de  $Y$  (cf. [15]) et  $c_t(\bullet)$  désigne la  $t$ -ième classe de Chern à valeurs dans  $\text{CH}^t(Y)$ .

Les conséquences de la Conjecture 1.1 déjà démontrées dans la littérature mathématique sont les suivantes. Dans la situation où  $f$  est lisse, il est démontré par

Grothendieck dans [19] (voir les calculs faits dans [14]) que l'image de la Conjecture 1.1 par l'application " classe de cycle" est vérifiée (pour une généralisation au cas non-lisse, voir le point (a) du Théorème 1.2 *infra*). Encore dans la situation où  $f$  est lisse, le fait que  $c_t(H_{\text{dR}}^1(X/Y))$  est de torsion pour tout  $t \geq 0$  est démontré dans [47]. Dans [13], il est démontré que  $c_t(H_{\text{dR}}^1(X/Y)(\log))$  est de torsion pour tout  $t \geq 0$  et que l'image par l'application classe de cycle de  $c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))$  est de torsion pour tout  $j, t \geq 0$ . Lorsque  $f$  est lisse, il est démontré dans [5, Appendix] que les classes de Cheeger-Simons de  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)$  sont de torsion pour tout  $j \geq 0$ ; si l'on suppose de plus que  $Y$  est projectif sur  $K$ , ceci implique que les classes de Chern en cohomologie de Deligne de  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)$  sont de torsion pour tout  $j \geq 0$ ; ce dernier énoncé est aussi une conséquence d'un théorème de Reznikov (cf. [41]). Lorsque le morphisme  $f$  est étale, les travaux de Fulton et MacPherson dans [16, Cor. 19.3] démontrent la Conjecture 1.1. Dans [38], Pappas démontre un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch sans dénominateurs pour les morphismes projectifs et lisses. Si l'on applique ce théorème au complexe de de Rham de  $f$ , on obtient des énoncés d'annulation pour les classes de Chern des fibrés de Gauss-Manin. Cependant, ces énoncés dépendent a priori de la dimension relative de  $f$ .

On notera que l'énoncé que  $c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))$  est de torsion pour tout  $j, t \geq 0$  est déjà conjectural. Cette forme faible de la conjecture est implicite dans les travaux de Bloch, Esnault et Viehweg (par ex. [13] et [7]). Elle est formellement proposée dans [36, Par. 4.2, Conj. 3] dans le cas où  $f$  est lisse.

Du point de vue des auteurs, la forme faible de la conjecture est motivée par une conjecture en théorie d'Arakelov [35, Conjecture 3.1] dont elle est une conséquence. Enfin la définition des nombres  $N_t$  est motivée par le théorème de Grothendieck mentionné ci-dessus.

Remarquons également que la Conjecture 1.1 n'est pas optimale déjà pour  $j = 0$  et  $j = 1$  :

Cas  $j = 0$  : dans [16, Cor. 19.3] il est démontré que lorsque  $f$  est un morphisme étale et que  $t$  est pair, on a

$$\frac{1}{2}N_t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^0(X/Y)) = 0.$$

En particulier, il vient que  $12 \cdot c_2(H_{\text{dR}}^0(X/Y)) = 0$ .

Cas  $j = 1$  : si  $f : X \rightarrow Y$  fait de  $X$  un schéma abélien sur  $Y$ , la Conjecture 1.1

combinée à [36, Th. 1] implique que

$$\left(\prod_{p \leq t} p^{\text{ord}_p(N_t)}\right) \left(\prod_{p > t} p^{\text{ord}_p[\text{pgcd}(\text{Num}((2^t-1)B_t), N_t)]}\right) \cdot c_t(H_{\text{dR}}^1(X/Y)) = 0 ; \quad (1)$$

où les produits sont pris pour  $p$  parcourant l'ensemble des nombres premiers et où  $\text{Num}(r)$  désigne le numérateur du nombre rationnel  $r$ . Un cas particulier de l'équation (1) est alors l'égalité

$$8 \cdot c_2(H_{\text{dR}}^1(X/Y)) = 0. \quad (2)$$

Cependant  $N_2 = 24 > 12 > 8$ , d'où la non-optimalité lorsque  $j = 0, 1$ .

Cela suggère qu'une conjecture optimale raffinant la Conjecture 1.1 devrait tenir compte du poids  $j$  du fibré de Gauss-Manin.

Au sujet de la Conjecture 1.1, nous démontrerons les résultats partiels suivants.

Si  $K = \mathbb{C}$ , nous noterons

$$\text{cl} : \text{CH}^\bullet(Y) \rightarrow H^{2\bullet}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

l'application qui associe à un cycle algébrique sa classe dans la cohomologie singulière de  $Y(\mathbb{C})$ .

Si  $Y$  est projectif sur  $K$ , nous noterons

$$\text{alb} : \text{CH}^{\dim(Y)}(Y)_0 \rightarrow \text{Alb}(Y)(K)$$

l'application qui associe à un 0-cycle algébrique de degré nul son image dans la variété d'Albanese de  $Y$ .

Soit  $l$  un nombre premier. Si  $Y$  est projectif sur  $K$ , nous noterons

$$\lambda_l^t : \text{CH}^t(Y)[l^\infty] \rightarrow H_{\text{ét}}^{2t-1}(Y, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(t))$$

l'application d'Abel-Jacobi de Bloch (voir [6] pour sa définition). Elle donne lieu à une application

$$\lambda^t : \text{Tor}(\text{CH}^t(Y)) \rightarrow \bigoplus_{l \text{ premier}} H_{\text{ét}}^{2t-1}(Y, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(t)).$$

Soit  $d_Y := \dim(Y)$ .

**Théorème 1.2.** (a) *Supposons que  $K = \mathbb{C}$ . Pour tout entiers  $j$  et  $t$  positifs, l'égalité*

$$\text{cl} [ N_t \cdot c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) ] = 0$$

*est vérifiée dans  $\mathbb{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ .*

(b) *Supposons que  $Y$  est projectif sur  $K$  ; l'égalité*

$$\text{alb} [ N_{d_Y} \cdot c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) ] = 0$$

*est alors vérifiée dans  $\text{Alb}(Y)(K)$  pour tout entier  $j \geq 0$ .*

(c) *Supposons que  $c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))$  est de torsion et que  $Y$  est projectif sur  $K$  ; alors*

$$N_{d_Y} \cdot c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0.$$

(d) *Supposons que les composantes irréductibles de  $D$  et  $E$  sont lisses sur  $K$ . Pour tout entier  $t \geq 0$ , l'égalité*

$$N_t \cdot c_t \left( \sum_{j \geq 0} (-1)^j \mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log) \right) = 0$$

*est vérifiée dans  $\text{CH}^t(Y)$ .*

(e) *L'égalité*

$$N_t \cdot c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^0(X/Y)(\log)) = 0$$

*est vérifiée pour tout entier  $t \geq 0$ . Si l'on suppose que les composantes irréductibles de  $D$  et  $E$  sont lisses sur  $K$  et que les fibres de  $f$  sont de dimension 1, alors*

$$N_t \cdot c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0$$

*pour tout entiers  $j$  et  $t$  positifs.*

(f) *Supposons que  $f$  est lisse, que  $K = \mathbb{C}$  et que l'image de la représentation du groupe fondamental de  $Y(\mathbb{C})$  associée au système localement constant  $R^j f(\mathbb{C})_* \mathbb{Q}$  est finie ; alors*

$$N_t \cdot c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0$$

*pour tout entier  $t \geq 0$ .*

(g) *Supposons que  $Y$  est projectif sur  $K$ . Supposons également que la classe  $c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))$  est de torsion ; alors*

$$\lambda^t [ N_t \cdot c_t(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) ] = 0.$$

(h) *Supposons que  $Y$  est projectif sur  $K$ . Supposons de plus que la classe  $c_2(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))$  est de torsion; alors*

$$N_2 \cdot c_2(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0.$$

(i) *Soit  $L \supseteq K$  un corps contenant  $K$ . On suppose que  $L$  est aussi algébriquement clos. Soit  $j$  et  $t$  des entiers positifs. L'identité*

$$N_t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0$$

*est vérifiée dans  $\text{CH}^t(Y)$  ssi l'identité*

$$N_t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X_L/Y_L)(\log)) = 0$$

*est vérifiée dans  $\text{CH}^t(Y_L)$ .*

(j) *Supposons que  $t$  est impair. Alors*

$$2 \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0$$

*pour tout entier positif  $j$ .*

On rappelle que  $N_t = 2$  si  $t$  est impair.

En dehors des points (i) et (j), les démonstrations des différents points du Théorème 1.2 ont des structures semblables, même si les outils utilisés varient. Dans les preuves de (a), (b), (d), (f) et (g), on démontre chaque fois que l'image (d'une combinaison linéaire) de  $c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y))$  dans un certain groupe est invariante par multiplication par  $p^t$  pour presque tout  $p$ . Un lemme de nature purement arithmétique, le Lemme 3.2 (déjà remarqué par Adams dans [1]), montre alors que l'image de  $c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y))$  dans ce groupe est annulée par  $N_t$ . Dans le cas de (a) et (b), cette invariance est démontrée par réduction modulo un nombre premier et est une conséquence de l'existence de la suite spectrale conjuguée logarithmique en caractéristique positive. Le relèvement à la caractéristique nulle est rendu possible par un théorème général de changement de base en cohomologie étale (Théorème 2.4) pour (a), par l'existence de la variété d'Albanese pour (b) et par l'invariance par spécialisation de l'application  $\lambda^t$  pour (g). Dans le cas de (d), l'invariance est une conséquence du théorème d'Adams-Riemann-Roch (cf. la section 2.4) et dans le cas de (f), l'invariance provient d'une interprétation galoisienne des opérations d'Adams sur l'anneau des représentations rationnelles

d'un groupe fini. Le point (c) est une conséquence du point (b) et du théorème de Rojtman (voir plus bas pour les détails) et le point (e) est une conséquence du point (d). Le point (h) est une conséquence du point (g) et d'un théorème de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé (cf. *infra*). Le point (i) résulte de l'existence d'un morphisme de spécialisation en théorie de Chow et d'un théorème de F. Lecomte, qui assure que la torsion de la théorie de Chow est invariante par extension algébriquement close. Le point (j) est une conséquence du théorème de Lefschetz difficile en famille et de la dualité de Poincaré relative, conjugué au fait que, dans notre situation, la connexion de Gauss-Manin est régulière et a des résidus nilpotents.

**Remarque (1).** Supposons que  $Y$  est projectif et irréductible et que  $K = \mathbb{C}$ . Supposons de plus que les groupes  $H^i(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$  sont supportés en codimension 1 pour  $i = 2, \dots, d_Y$ . La conjecture de Bloch généralisée (voir par exemple [29, Conj. 3.3]) affirme alors que le morphisme  $\text{alb}$  est un isomorphisme. On voit ainsi que sous les hypothèses ci-dessus, la conjecture de Bloch généralisée jointe au point (b) implique que

$$N_{d_Y} \cdot c_{d_Y}(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0.$$

**Remarque (2).** Fixons un corps de base de caractéristique nulle  $L$ . Dans l'article [12] le premier fibré de Gauss-Manin  $H_{\text{dR}}^1(\mathcal{A}_L/A_{g,L})$  sur  $A_{g,L}$ , où  $A_g$  est le champ classifiant les variétés abéliennes principalement polarisées, est considéré. Sont introduites également les notions de groupe de Chow d'un champ et de  $t$ -ième classe de Chern à valeurs dans ce groupe. Une conséquence de [12, Prop. 4.2 et Rem. 4.3] est alors que l'ordre de la  $t$ -ième classe de Chern du fibré  $H_{\text{dR}}^1(\mathcal{A}_L/A_{g,L})$  dans le groupe de Chow de  $A_{g,L}$  est divisible par  $N_t/2$ , si  $t$  est pair et si  $t \leq g$ . En particulier, si  $g = 2$ , l'élément  $c_2(H_{\text{dR}}^1(\mathcal{A}_L/A_{g,L}))$  est d'ordre fini divisible par  $12 = N_2/2$ . Par ailleurs l'équation (2) énonce que  $8 \cdot c_2(H_{\text{dR}}^1(X/Y)) = 0$  pour toute fibration en surfaces abéliennes sur un base lisse et quasi-projective sur  $L$ . Cela suggère que le quotient entre 8 et 12 représente une obstruction à descendre au champ  $A_{g,L}$  l'annulation  $8 \cdot c_2(H_{\text{dR}}^1(X/Y)) = 0$  valant pour toute famille de variétés abéliennes sur un schéma.

**Remarque (3).** Les calculs faits dans cet article suggèrent la question suivante, que les auteurs n'osent pas élever au rang de conjecture. Soit  $S$  un schéma et soit  $w : W \rightarrow Z$  un morphisme de  $S$ -schémas. On suppose  $W$  et  $Z$  munis de diviseurs à croisements normaux relativement à  $S$  et l'on suppose que  $w$  est semi-stable

relativement à ces diviseurs. Par ailleurs, on suppose que la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique de  $W$  sur  $Z$  dégénère et que les fibrés de Gauss-Manin logarithmiques  $H^j(W/Z)(\log)$  sont localement libres. Enfin pour tout entier  $k \geq 0$  on note  $\psi^k$  la  $k$ -ième opération d'Adams (cf. sous-section 2.4 *infra*). Il est alors légitime de demander si l'on a

$$\psi^p(H^j(W/Z)(\log)) = H^j(W/Z)(\log) \quad (3)$$

dans  $K_0(Z)[\frac{1}{p}]$  pour presque tout nombre premier  $p$ . Une réponse positive à cette question entraînerait la Conjecture 1.1 (voir la démonstration du Théorème 1.2). On peut aussi espérer que l'équation (3) et donc la Conjecture 1.1 restent vérifiées si l'on remplace  $W/Z$  par un " motif relatif à singularités semi-stables sur  $Z$ " chaque fois que l'on peut donner un sens à l'expression entre guillemets.

La structure de l'article est la suivante. La section 2 est consacrée à des rappels sur les morphismes semi-stables, les résultats d'Illusie et de Gabber sur la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique, le théorème d'Adams-Riemann-Roch et les classes de Chern en cohomologie étale. Dans la section 3, on démontre les points du Théorème 1.2 dans l'ordre alphabétique.

**Notations.** Si  $G$  est un groupe, on notera  $\text{Tor}(G)$  le sous-ensemble de  $G$  constitué des éléments d'ordre fini de  $G$ . Si  $T$  est un espace topologique noethérien, on notera  $\text{Irr}(T)$  l'ensemble de ses composantes irréductibles. Si  $H$  est un ensemble et  $\mathcal{P}$  une propriété, l'expression "  $\mathcal{P}(h)$  est vérifiée pour presque tout  $h \in H$ " signifie que  $\mathcal{P}(h)$  est vérifiée pour tout élément  $h \in H' \subseteq H$ , où  $H'$  est un sous-ensemble de  $H$  tel que  $H \setminus H'$  est fini. Si  $T$  est l'espace sous-jacent à un schéma et  $S \subseteq T$  est un sous-ensemble, on écrira  $\text{Zar}(S)$  ou  $\text{Zar}_T(S)$  pour la fermeture de  $S$  pour la topologie de Zariski sur  $T$ .

**Remerciements.** Nos remerciements vont d'abord au rapporteur de cet article, pour toutes ses remarques et pour nous avoir enseigné les preuves des points (i) et (j) du Théorème 1.2. Bien qu'anonyme, il est en fait un auteur d'une partie de ce texte. Nous remercions P. Brosnan, J.-L. Colliot-Thélène, P. Colmez, F. Han et J.-P. Serre pour des conversations intéressantes et pour des indications bibliographiques. Nous sommes particulièrement redevables à D. Zagier pour ses explications sur le Lemme 3.2 et son contexte arithmétique, à H. Esnault pour ses encouragements et ses explications sur la variété d'Albanese et à R. Pink pour nous avoir encouragé à rédiger la remarque (3) et pour nombre de conversations intéressantes.

## 2 Rappels

### 2.1 Morphismes semi-stables et suite spectrale conjuguée à pôles logarithmiques

Soit  $S$  un schéma. Soient  $W$  un schéma lisse sur  $S$  et  $\mathfrak{D} \hookrightarrow W$  un sous-schéma fermé. On dit que  $\mathfrak{D}$  est un *diviseur à croisements normaux* dans  $W$  relativement à  $S$  (cf. [28, section 1]) si pour tout point  $w \in W$ , il existe

- un ouvert étale  $U \rightarrow W$  tel que l'image de  $U$  dans  $W$  contient  $w$  ;
- des nombres  $m, k \in \mathbb{N}$  avec  $k \leq m$  ;
- un  $S$ -morphisme étale  $r : U \rightarrow \mathbb{A}_S^m$  tels que l'image réciproque de l'idéal de  $\mathfrak{D}$  dans  $U$  coïncide avec l'image réciproque de l'idéal  $(x_1 x_2 \cdots x_k)$  par  $r$ .

Ici  $x_1, \dots, x_m$  désignent les coordonnées naturelles sur  $\mathbb{A}_S^m$ . On dira que le quadruplet  $(U, r, m, k)$  est adapté à  $\mathfrak{D}$ .

On notera que dans la définition ci-dessus,  $k$  peut être nul. Dans ce cas, l'image réciproque de  $\mathfrak{D}$  dans  $U$  est vide.

Soit  $j : W^* := W \setminus \mathfrak{D} \hookrightarrow W$  l'inclusion naturelle. Le faisceau  $\Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D})$  est un sous-faisceau en  $\mathcal{O}_W$ -modules de  $j_* \Omega_{W^*/S}^1$ . Il est déterminé de manière unique par les conditions suivantes :

Soit  $W'$  un autre schéma lisse sur  $S$  et  $\mathfrak{D}' \hookrightarrow W'$  un diviseur à croisements normaux relativement à  $S$ . Soit  $j' : W'^* := W' \setminus \mathfrak{D}' \hookrightarrow W'$  l'inclusion naturelle.

- Si  $l : W \rightarrow W'$  est un  $S$ -morphisme étale tel que  $l^* \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$ , alors il existe un unique morphisme  $-->$  de  $\mathcal{O}_W$ -modules tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} l^* \Omega_{W'/S}^1(\log \mathfrak{D}') & \longrightarrow & l^* j'_* \Omega_{W'^*/S}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D}) & \longrightarrow & j_* \Omega_{W^*/S}^1 \end{array}$$

commute et que la flèche  $-->$  soit un isomorphisme.

- Si  $W = \mathbb{A}_S^m$  et  $\mathfrak{D} = (x_1 x_2 \cdots x_k)$ , alors  $\Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D})$  est libre sur  $\mathbb{A}_S^m$ , de base  $dx_1/x_1, \dots, dx_k/x_k, dx_{k+1}, \dots, dx_m$ .

En particulier, le faisceau  $\Omega_{W/S}^\bullet(\log \mathfrak{D})$  est localement libre.

Supposons maintenant que les composantes irréductibles  $\mathfrak{D}_i$  de  $\mathfrak{D}$  sont toutes lisses. On dispose alors d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{W/S}^1 \rightarrow \Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D}) \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_i} \rightarrow 0.$$

Le morphisme  $\text{Res}$  s'appelle *résidu de Poincaré*. Localement pour la topologie étale, si  $W = \mathbb{A}_S^m$  et  $\mathfrak{D} = (x_1 x_2 \cdots x_k)$ , alors :

$$\text{Res}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j=k+1}^m \alpha_j dx_j\right) = \bigoplus_{j=1}^k \alpha_j|_{(x_j)}.$$

Soit  $Z$  un autre schéma lisse sur  $S$  et  $\mathfrak{E} \hookrightarrow Z$  un diviseur à croisements normaux relativement à  $S$ . Soit  $g : W \rightarrow Z$  un  $S$ -morphisme. On dit que  $g$  est *semi-stable* relativement à  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{E}$  (cf. [28, section 1]), s'il y a une égalité ensembliste  $\mathfrak{D} = g^{-1}(\mathfrak{E})$  et si pour tout point  $w \in W$ , il existe des nombres  $m, n, k, p \in \mathbb{N}$  et un diagramme commutatif de  $S$ -schémas

$$\begin{array}{ccccc} W & \longleftarrow & U & \xrightarrow{r} & \mathbb{A}_S^m \\ \downarrow g & & \downarrow g_U & & \downarrow \sigma \\ Z & \longleftarrow & V & \xrightarrow{l} & \mathbb{A}_S^n \end{array}$$

(4)

tels que

- l'image de  $U$  contient  $w$  ;
- le quadruplet  $(U, r, m, k)$  (resp.  $(V, l, n, p)$ ) est adapté à  $\mathfrak{D}$  (resp.  $\mathfrak{E}$ ) ;
- le morphisme  $\sigma$  est de la forme :

$$\sigma(x_1, \dots, x_m) = (x_1 x_2 \cdots x_{m_1}, x_{m_1+1} x_{m_1+2} \cdots x_{m_2}, \dots, x_{m_{p-1}+1} \cdots x_{m_p}, x_{m_p+t_1}, x_{m_p+t_2}, x_{m_p+t_3}, \dots, x_{m_p+t_{n-p}})$$

où  $m_p = k$  et  $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-p} \leq m - k$ .

On peut montrer qu'une conséquence de cette définition est l'égalité schématique  $g^* \mathfrak{E} = \mathfrak{D}$ . On en déduit aussi que  $g$  est plat et localement d'intersection complète (cf. [28, Par. 1.3, p. 144]). Par ailleurs, on voit que les fibres de  $g$  sont géométriquement réduites.

Une autre conséquence est qu'il existe une unique flèche  $\dashrightarrow$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} g^* \Omega_{Z/S}^1 & \longrightarrow & g^* \Omega_{Z/S}^1(\log \mathfrak{E}) \\ \downarrow g^* & & \downarrow \\ \Omega_{W/S}^1 & \longrightarrow & \Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D}) \end{array} \quad (5)$$

commute.

Soit  $i_{\text{ns}} : W_{\text{ns}} \rightarrow W$  l'ouvert de lissité de  $g$ . Le *complexe de de Rham de  $W$  sur  $Z$  à pôles logarithmiques le long de  $\mathfrak{D}$* , noté  $\Omega_{W/Z}^\bullet(\log \mathfrak{D}/\mathfrak{E}) = \Omega_{W/Z}^\bullet(\log) = \omega_{W/Z}^\bullet$  est l'image  $i_{\text{ns},*}\Omega_{W_{\text{ns}}/Z}^\bullet$  par  $i_{\text{ns}}$  du complexe de de Rham de  $W_{\text{ns}}$  sur  $Z$ .

Au sujet de ce complexe, on peut démontrer les faits suivants. Tout d'abord, on dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow g^*\Omega_{Z/S}^1(\log \mathfrak{E}) \rightarrow \Omega_{W/S}^1(\log \mathfrak{D}) \rightarrow \omega_{W/Z}^1 \rightarrow 0$$

où la deuxième flèche correspondant à la flèche en pointillé  $--\rightarrow$  dans le diagramme (5). Enfin, il existe un isomorphisme canonique  $\Lambda^i(\omega_{W/Z}^1) \simeq \omega_{W/Z}^i$ .

Soit maintenant  $p$  un nombre premier. Supposons que  $S$  est le spectre d'un corps de caractéristique  $p$ . Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_W & & \\ & & \curvearrowright & & \\ W & \xrightarrow{F_{W/Z}} & W' & \xrightarrow{J} & W \\ & \searrow g & \downarrow g' & & \downarrow g \\ & & Z & \xrightarrow{F_Z} & Z \end{array}$$

où  $F_W$  (resp.  $F_Z$ ) est le morphisme de Frobenius absolu de  $W$  (resp.  $Z$ ). Le carré de ce diagramme est par hypothèse cartésien et le morphisme  $F := F_{W/Z}$  (appelé morphisme de Frobenius relatif) est l'unique morphisme rendant le diagramme commutatif.

**Théorème 2.1** (Gabber, Illusie [28]). *Les différentielles du complexe  $F_*\omega_{W/Z}^\bullet$  sont  $\mathcal{O}_{W'}$ -linéaires et pour tout  $i \geq 0$ , il existe un isomorphisme canonique de faisceaux en  $\mathcal{O}_{W'}$ -modules*

$$C^{-1} : J^*\omega_{W/Z}^i \simeq \mathcal{H}^i F_*\omega_{W/Z}^\bullet.$$

Remarquons maintenant que, dans la catégorie  $D(Z)$  dérivée de celle des faisceaux en  $\mathcal{O}_Z$ -modules, on a

$$\text{R}g_*(\omega_{W/Z}^\bullet) = \text{R}g'_*(\text{R}F_*(\omega_{W/Z}^\bullet)).$$

Puisque  $F$  est fini, on dispose d'un isomorphisme  $\mathrm{R}F_*(\omega_{W/Z}^\bullet) \simeq F_*\omega_{W/Z}^\bullet$  dans  $\mathrm{D}(W')$ . La deuxième suite spectrale d'hypercohomologie appliquée à  $F_*\omega_{W/Z}^\bullet$  s'exprime

$$E_2^{pq} = \mathrm{R}^p g'_* \mathcal{H}^q(F_*\omega_{W/Z}^\bullet) \implies \mathrm{R}^{p+q} g_*(\omega_{W/Z}^\bullet)$$

ou encore, via l'isomorphisme du Théorème 2.1,

$$E_2^{pq} = \mathrm{R}^p g'_* J^* \omega_{W/Z}^q \implies \mathrm{R}^{p+q} g_*(\omega_{W/Z}^\bullet).$$

Comme  $F_Z$  est plat, cette dernière suite spectrale donne lieu à la suite spectrale

$$E_2^{pq} = F_Z^* \mathrm{R}^p g_* \omega_{W/Z}^q \implies \mathrm{R}^{p+q} g_*(\omega_{W/Z}^\bullet).$$

On appelle cette dernière suite spectrale *la suite spectrale conjuguée logarithmique*, ou simplement *la suite spectrale conjuguée* de  $g$ .

On suppose maintenant à nouveau que  $S$  est un schéma de base général. La première suite spectrale d'hypercohomologie appliquée au complexe de de Rham à pôles logarithmiques le long de  $\mathfrak{D}$  s'exprime

$$E_1^{pq} = \mathrm{R}^q g_* \omega_{W/Z}^p \implies \mathrm{R}^{p+q} g_*(\omega_{W/Z}^\bullet).$$

Cette dernière suite se spécialise en la suite spectrale de Hodge vers de Rham habituelle, lorsque  $g$  est lisse. Nous l'appellerons *suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique*, ou simplement *suite spectrale de Hodge vers de Rham*.

Une simple comparaison de rangs montre que si la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en  $E_1$ , alors la suite spectrale conjuguée (lorsqu'elle existe) dégénère en  $E_2$ .

**Théorème 2.2** (Illusie [28]). *Si  $S$  est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en  $E_1$  et les faisceaux  $\mathrm{R}^q g_* \omega_{W/Z}^p$  sont localement libres.*

## 2.2 Classes de Chern étales

Dans cette sous-section, on rappelle la définition et les propriétés principales des classes de Chern en cohomologie étale. Soit  $Z$  un schéma et  $n$  un nombre entier inversible sur  $Z$ . On dispose d'un complexe de schémas en groupes commutatifs

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{*n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

qui donne lieu à une suite exacte de faisceaux abéliens sur le petit site étale de  $Z$ , appelée la suite de Kummer. La suite exacte longue de cohomologie étale de cette suite contient en particulier le morphisme

$$H_{\text{ét}}^1(Z, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Z, \mu_n).$$

Par ailleurs, il existe un isomorphisme canonique  $\text{Pic}(Z) \simeq H_{\text{ét}}^1(Z, \mathbb{G}_m)$ . On obtient donc un morphisme

$$c_1^{\text{ét}} : \text{Pic}(Z) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(Z, \mu_n).$$

Voir [19] pour tout ceci.

**Proposition-Définition 2.3.** *Il existe une unique famille d'opérations  $c_i^{\text{ét}}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) avec les propriétés suivantes :*

- (a) *l'opération  $c_i^{\text{ét}}$  associe un élément  $c_i(E)$  de  $H_{\text{ét}}^{2i}(Z, \mu_n^{\otimes i})$  à tout faisceau cohérent localement libre sur un schéma  $Z$  où  $n$  est inversible ;*
- (b) *si  $g : Z' \rightarrow Z$  est un morphisme de schémas alors  $f^*c_i^{\text{ét}}(E) = c_i^{\text{ét}}(f^*E)$  ( $n$  étant supposé inversible sur  $Z$  et  $Z'$ ) ;*
- (c) *l'opération  $c_1^{\text{ét}}$  est définie comme plus haut ;*
- (d) *si*

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

*est une suite exacte de faisceaux cohérents localement libres sur un schéma  $Z$  alors on a la relation*

$$c_i^{\text{ét}}(E) = \sum_{j+k=i} c_j^{\text{ét}}(E')c_k^{\text{ét}}(E'')$$

*dans l'anneau de cohomologie  $\bigoplus_{m \geq 0} H_{\text{ét}}^{2m}(Z, \mu_n^{\otimes m})$ .*

Pour la démonstration, voir [25, Exp. VII, Prop. 3.4].

## 2.3 Théorèmes de changement de base et de comparaison en cohomologie étale

Nous rappelons ici deux théorèmes fondamentaux de la théorie de la cohomologie étale qui joueront un rôle essentiel dans la démonstration du Théorème 1.2 (a). Soit  $n \geq 1$ .

**Théorème 2.4** (Deligne et al.). *Soit  $g : W \rightarrow Z$  un morphisme de type fini. On suppose que  $n$  est inversible sur  $Z$  (et donc  $W$ ). Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau étale constructible en  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur  $W$ . Alors il existe un ouvert dense  $U \subseteq Z$  tel que*

- (a) *pour tout  $i \geq 0$ ,  $R^i f_* \mathcal{F}|_U$  est un faisceau constructible sur  $U$  ;*
- (b) *pour tout  $i \geq 0$ , le faisceau  $R^i f_* \mathcal{F}|_U$  est invariant par tout changement de base au-dessus de  $U$ .*

Pour la démonstration, voir [23, Finitude, Th. 1.9].

**Théorème 2.5** (Grothendieck et al.). *Soit  $Z$  un schéma séparé et de type fini sur  $\mathbb{C}$ . Il existe pour tout  $i \geq 0$  et tout  $n \geq 1$  un isomorphisme canonique de comparaison*

$$\kappa_i : H_{\text{ét}}^i(Z, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^i(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Pour la démonstration, voir [24, Exp. XI].

On rappelle que sur  $\mathbb{C}$ , le choix d'un isomorphisme de schémas en groupes  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$  est équivalent au choix d'une racine  $n$ -ième primitive de l'unité dans  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 2.6** (Grothendieck). *Soit  $Z$  un schéma lisse sur  $\mathbb{C}$ . Identifions  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mu_n$  via la racine de l'unité  $\exp(2i\pi/n)$ . Alors  $\kappa_{2i}(c_i^{\text{ét}}(E))$  coïncide avec la  $i$ -ème classe de Chern du fibré vectoriel  $E(\mathbb{C})$  considéré comme fibré vectoriel topologique sur  $Z(\mathbb{C})$ .*

Pour la démonstration, voir [19, Par. 1, p. 243].

## 2.4 Le théorème d'Adams-Riemann-Roch

Soit  $W$  un schéma noethérien. Nous écrivons  $K_0(W)$  pour le groupe de Grothendieck des faisceaux localement libres sur  $W$ . Le produit tensoriel induit une application bilinéaire de  $K_0(W)$  dans  $K_0(W)$  qui en fait un anneau commutatif unifère. Pour tout morphisme de schémas noethériens  $g : W \rightarrow Z$ , le foncteur  $f^*$  (image réciproque des faisceaux en  $\mathcal{O}_Z$ -modules) induit un morphisme d'anneaux  $g^* : K_0(Z) \rightarrow K_0(W)$ .

On rappelle que pour tout  $k \geq 0$ , l'opération d'Adams  $\psi^k : K_0(W) \rightarrow K_0(W)$  est l'unique endomorphisme d'anneau compatible aux images réciproques tel que  $\psi^k(L) = L^{\otimes k}$  pour tout fibré en droites  $L$ .

Les opérations d'Adams satisfont les deux relations de compatibilités suivantes.

Supposons le temps de la prochaine phrase que  $W$  est lisse sur un corps. Il existe alors pour tout  $t \geq 0$  des applications classe de Chern  $c_t : K_0(W) \rightarrow \text{CH}^t(W)$  et l'on a

$$c_t(\psi^k(w)) = k^t \cdot c_t(w). \quad (6)$$

Supposons à nouveau juste le temps de la prochaine phrase que  $p$  est un nombre premier et que  $W$  est un schéma sur  $\mathbb{F}_p$  tel que le morphisme de Frobenius absolu  $F_W : W \rightarrow W$  est plat. On a alors

$$F_W^* = \psi^p. \quad (7)$$

Les deux compatibilités sont des conséquences du principe de scindage (cf. [40, Th. 2.1]).

Nous aurons aussi besoin des *classes cannibales*  $\theta^k$ . Pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\theta^k$  est une opération associant des éléments de  $K_0(W)$  à des faisceaux localement libres sur  $W$  et jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord, pour tout fibré en droites  $L$ , on a

$$\theta^k(L) = 1 + L + L^{\otimes 2} + \dots + L^{\otimes(k-1)}.$$

Par ailleurs, pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

de faisceaux localement libres, on a  $\theta^k(E') \otimes \theta^k(E'') = \theta^k(E)$ . Enfin les classes  $\theta^k$  sont compatibles aux images réciproques. Ces trois propriétés déterminent l'opération  $\theta^k$ .

Dans le contexte des classes cannibales, nous mentionnerons le lemme suivant :

**Lemme 2.7.** *Si  $W$  est muni d'un fibré en droites ample, alors l'élément  $\theta^k(E)$  est inversible dans  $K_0(W)_{[\frac{1}{k}]}$  pour tout faisceau localement libre  $E$  sur  $W$ .*

Pour la démonstration voir par exemple [43, sec. 4, Prop. 4.2] (faute d'une référence canonique).

On suppose maintenant que  $W$  est régulier et possède un fibré en droites ample. Soit  $K'_0(W)$  le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur  $Y$ . On peut démontrer que l'homomorphisme de groupes naturel  $K_0(W) \rightarrow K'_0(W)$  est un isomorphisme. Soit maintenant  $g : W \rightarrow Z$  un morphisme projectif et localement d'intersection complète de schémas. On définit alors le morphisme de groupes  $Rg_* : K_0(W) \rightarrow K'_0(Z)$  par la formule

$$Rg_*(E) := \sum_{l \geq 0} (-1)^l R^l g_*(E)$$

et on notera aussi  $Rg_*$  le morphisme  $K_0(W) \rightarrow K_0(Z)$  obtenu par composition.

Par hypothèse, on dispose d'une factorisation

$$W \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} Z$$

de  $g$  telle que  $i$  est une immersion régulière et  $p$  est lisse. On définit

$$\theta^k(g)^{-1} := \theta^k(\Omega_p)^{-1} \otimes \theta^k(N)$$

où  $N$  est le fibré conormal de l'immersion  $i$ . On peut montrer que  $\theta^k(g)^{-1}$  ne dépend pas de la factorisation.

**Théorème 2.8** (théorème d'Adams-Riemann-Roch). *Pour tout  $w \in K_0(W)[\frac{1}{k}]$ , l'égalité*

$$\psi^k(Rg_*(w)) = Rg_*(\theta^k(g)^{-1} \otimes \psi^k(w))$$

*est vérifiée dans  $K_0(Z)[\frac{1}{k}]$ .*

Pour une démonstration complète (reposant de façon essentielle sur les idées de [21] et [4]), voir [32].

## 3 Démonstration du Théorème 1.2

### 3.1 Démonstration de (a)

**Lemme 3.1.** *Supposons que pour tout nombre premier  $l$  et pour tout  $n \geq 1$ , l'image de  $N_t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y))$  dans  $H^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z})$  est nulle. Alors le point (a) du Théorème 1.2 est vérifié.*

**Preuve.** Considérons les application naturelles

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_l) & \xrightarrow{\lambda} & \varprojlim_j \mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l^j\mathbb{Z}) \\ \mu \uparrow & & \\ \mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

L'espace  $X(\mathbb{C})$  muni de la topologie ordinaire est de type fini. Cela implique que l'application  $\lambda$  est un isomorphisme (voir [19, 3.3] pour les détails). Par ailleurs, compte tenu du fait que  $\mathbb{Z}_l$  est plat sur  $\mathbb{Z}$ , cela implique aussi que  $\mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_l) \simeq \mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l$  (au vu de la suite universelle des coefficients pour la cohomologie). En utilisant le fait que  $\mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est de type fini, on en déduit que le noyau  $\ker(\mu)$  de  $\mu$  est de torsion et que  $\ker(\mu)$  ne contient aucun élément non nul qui soit de  $l^\infty$ -torsion. Autrement dit, le morphisme  $\ker(\mu) \rightarrow \ker(\mu)$  de multiplication par  $l$  est injectif.

Remarquons maintenant que  $\mu$  et  $\lambda$  sont par construction compatibles à la formation des classes des Chern. On en déduit que l'image de  $e := N_t \cdot c_t(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)(\log))$  dans  $\mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est de torsion. Par ailleurs, si  $e \neq 0$ , alors pour tout  $k \geq 1$  et tout nombre premier  $l$ ,  $l^k \cdot e \neq 0$ . Ceci est la contradiction que achève la preuve du lemme.  $\square$

Au vu du dernier lemme et du Théorème 2.6, il suffit de démontrer que pour tout nombre premier  $l$  et pour tout  $n \geq 1$  la  $t$ -ième classe de Chern de  $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)(\log)$  dans  $\mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mu_{l^n})$  est annulée par  $N_t$ .

Fixons donc un nombre premier  $l$  et un nombre entier  $n \geq 1$ . Par abus de notation, jusqu'à la fin de la démonstration de (a), nous écrirons  $c_t(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)(\log))$  pour la classe de Chern de  $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)(\log)$  dans  $\mathrm{H}^{2t}(Y, \mu_{l^n}) \simeq \mathrm{H}^{2t}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ .

Soit  $L$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$  (comme corps) tel que le triplet  $f : X \rightarrow Y$  possède un modèle  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  sur  $L$ . Quitte à remplacer  $L$  par une de ses extensions finies, on peut supposer que  $L$  contient les racines  $l^n$ -ièmes de 1. Soit  $T$  un schéma affine, intègre, lisse et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , dont le corps de fonctions est isomorphe à  $L$ . Quitte à remplacer  $T$  par l'un de ses ouverts, on peut supposer qu'il existe des modèles lisses  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  de  $X_0$  et  $Y_0$  sur  $T$  et qu'il existe un  $T$ -morphisme semi-stable et projectif  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  qui est un modèle de  $f_0$ . Toujours quitte à réduire la taille de  $T$ , on peut supposer que la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique de  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  dégénère et que

les faisceaux de cohomologie de de Rham relative correspondants sont localement libres. Enfin, on peut supposer que  $l$  est inversible sur  $T$ . Soit  $\tilde{p} : \tilde{Y} \rightarrow T$  le morphisme structural. Au vu du Théorème 2.4, on aussi peut encore supposer que les faisceaux étales  $R^i \tilde{p}_* \mu_{l^n}$  (avec  $i \geq 0$ ) sont invariants par changement de base au-dessus de  $T$ . Abrégeons  $A^t(\bullet) := H_{\text{ét}}^{2t}(\bullet, \mu_{l^n}^{\otimes 2t})$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un point fermé de  $T$ . Soit  $p$  la caractéristique du corps résiduel en  $\mathfrak{p}$  (qui est nécessairement positive). Le corps résiduel de  $\mathfrak{p}$  est alors isomorphe à un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , où  $q$  est une puissance de  $p$ . Soit  $R_{\mathfrak{p}}$  la Henselisation stricte de l'anneau local  $\mathcal{O}_{T, \mathfrak{p}}$  de  $T$  en  $\mathfrak{p}$ . On dispose par construction d'un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Spec } \mathbb{C} & \longrightarrow & \text{Spec } L^{\text{sep}} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{T, \mathfrak{p}} & \longrightarrow & T & \longleftarrow & \text{Spec } \mathbb{F}_q \\
 & & \searrow & & \uparrow & & & & \nearrow \\
 & & & & \text{Spec } R_{\mathfrak{p}} & \longleftarrow & \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q & & 
 \end{array}$$

(où  $L^{\text{sep}}$  est la clôture séparable de  $L$ ). Par changement de base, ce diagramme induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{Y}_{\mathbb{C}} = Y & \xrightarrow{s_1} & \tilde{Y}_{L^{\text{sep}}} & \xrightarrow{s_2} & \tilde{Y}_{\mathcal{O}_{T, \mathfrak{p}}} & \xrightarrow{s_3} & \tilde{Y} & \xleftarrow{s_4} & \tilde{Y}_{\mathbb{F}_q} \\
 & & \searrow s_6 & & \uparrow s_7 & & & & \nearrow s_5 \\
 & & & & \tilde{Y}_R & \xleftarrow{s_8} & \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q} & & 
 \end{array}$$

Soit  $\pi : \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \rightarrow \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q$  le morphisme de structure. On dispose alors de deux suites spectrales : la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique

$$E_1^{rs} = R^s f_* \Omega_{\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^r / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}^r(\log) \implies H_{\text{dR}}^{r+s}(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q} / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log)$$

et la suite spectrale conjuguée logarithmique (voir sous-section 2.1)

$$E_2^{rs} = F_Y^* R^r f_* \Omega_{\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^s / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}^s(\log) \implies H_{\text{dR}}^{r+s}(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q} / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log).$$

Comme la première suite spectrale dégénère par hypothèse, il en est de même de la deuxième. En utilisant les compatibilités (6) et 7, on obtient donc l'égalité

$$c_t(H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q} / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log)) = c_t(F^* H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q} / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log)) = p^t \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q} / \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log))$$

dans  $A^t(\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})$ , qui est le pivot du présent article. L'invariance par changement de base assure maintenant que le morphisme

$$s_8^* : A^\bullet(\tilde{Y}_R) \rightarrow A^\bullet(\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})$$

est un isomorphisme. On déduit que

$$(1 - p^t) \cdot s_7^* s_3^*(c_t(H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}/\tilde{Y})(\log))) = 0$$

et donc que

$$(1 - p^t) \cdot s_1^* s_2^* s_3^*(c_t(H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}/\tilde{Y})(\log))) = (1 - p^t) \cdot c_t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)) = 0 \quad (8)$$

dans  $A^t(Y)$ .

Remarquons maintenant que l'image de  $T$  dans  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  est constructible par le théorème de Chevalley et que chaque fibre de  $T$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  contient un point fermé (car  $T$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}$ ). L'égalité (8) est donc vérifiée pour tous les nombres premiers  $p$  en dehors d'un ensemble fini. Nous allons maintenant appliquer le lemme suivant.

**Lemme 3.2.** *Soit  $E \subseteq \text{Spec } \mathbb{Z}$  un ensemble de densité de Dirichlet 1. Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction. Alors le nombre*

$$\text{pgcd}\{(1 - p^t) \cdot p^{f(p)}\}_{p \in E}$$

*divise  $N_t$ .*

**Preuve.** Soit  $\mu \geq 1$ . On rappelle les faits suivants. Si  $p$  est un nombre premier impair, il existe une unité d'ordre  $(p-1)p^{\mu-1}$  dans  $(\mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z})^*$ . Si  $p = 2$  et  $\mu > 3$  alors il existe une unité d'ordre  $p^{\mu-2}$  dans  $(\mathbb{Z}/p^\mu\mathbb{Z})^*$ . Si  $\mu = 2, 3$ , il existe une unité d'ordre 2 dans  $(\mathbb{Z}/2^\mu\mathbb{Z})^*$ . Pour une démonstration de ces faits, voir [11, Ch. 4, Prop. 3.32 et Cor. 3.34].

Soit maintenant  $c := \text{pgcd}\{(1 - p^t) \cdot p^{f(p)}\}_{p \in E}$ . Pour tout nombre premier  $p$ , soit  $c_p$  (resp.  $t_p$ ) la multiplicité de  $p$  dans  $c$  (resp.  $t$ ). Soit  $E'$  l'ensemble  $E$  privé des nombres premiers divisant  $c$ . Par construction du nombre  $c$ , pour tout  $p \in E'$ , les  $c$ -ièmes racines de l'unité dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$  sont contenues dans le groupe cyclique  $\mathbb{F}_{p^t}^*$ . En conséquence, on a  $\mathbb{F}_p(\mu_c) \subseteq \mathbb{F}_{p^t}$ . On en déduit que  $[\mathbb{F}_p(\mu_c) : \mathbb{F}_p] \mid t$ .

Ceci implique que pour tout  $p \in E'$ , le symbole d'Artin  $\sigma_p \in G := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_c)|\mathbb{Q})$  a la propriété suivante :

$$\text{ord}(\sigma_p) \mid t \quad (9)$$

Rappelons que  $G \simeq (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^* \simeq \prod_{p|c} (\mathbb{Z}/p^{c_p}\mathbb{Z})^*$ . Au moyen du théorème de densité de Tchebotareff, on déduit de (9) que

$$2^{c'_2-2} \prod_{p \neq 2, p|c} (p-1)p^{c_p-1} \mid t$$

où  $c'_2 = c_2$  si  $c_2 > 3$ ,  $c'_2 = 4$  si  $c_2 = 2, 3$  et  $c'_2 = 2$  si  $c_2 = 0, 1$ . En particulier, si  $p$  est impair et  $p|c$ , alors  $p - 1|t$  et  $c_p \leq t_p + 1$ . De même, on a  $c'_2 \leq t_2 + 2$ . On en déduit que  $c \mid N_t$ .  $\square$

Le Lemme 3.2 est une variation d'un résultat d'Adams démontré dans [1, Th. 2.7].

Soit maintenant  $E$  l'image de  $T$  dans  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction constante de valeur 0. Le Lemme 3.2 conclut la démonstration de (a).

### 3.2 Démonstration de (b) & (c)

*Commençons par la démonstration de (b).* Soit encore une fois  $L$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$  (comme corps) tel que le triplet  $f : X \rightarrow Y$  possède un modèle  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  sur  $L$ . Soit  $\kappa_L := \sum_i n_i P_i$  une combinaison linéaire formelle de points fermés de  $X_0$  dans  $X_0(L)$  telle que l'image de  $\kappa_L$  dans  $\text{CH}^{d_Y}(Y_0)$  est égale à  $c_{d_Y}(\text{H}_{\text{dR}}^j(X_0/Y_0)(\log))$ . Quitte à remplacer  $L$  par une de ses extensions finies, une telle combinaison linéaire existe. Soit  $T$  un schéma affine, intègre, lisse et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , dont le corps de fonctions est isomorphe à  $L$ . Comme avant, quitte à remplacer  $T$  par l'un de ses ouverts, on peut supposer qu'il existe des modèles lisses  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  de  $X_0$  et  $Y_0$  sur  $T$  et qu'il existe un  $T$ -morphisme semi-stable et projectif  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  qui est un modèle de  $f_0$ . Toujours quitte à réduire la taille de  $T$ , on peut supposer que la suite spectrale de Hodge vers de Rham de  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  dégénère et que les faisceaux de cohomologie de de Rham relative correspondants sont localement libres. Enfin, on peut supposer que les fibres géométriques de  $Y_0$  sur  $T$  sont connexes et projectives.

Soit  $\kappa := \sum_i n_i \cdot \text{Zar}(P_i)$  la combinaison linéaire formelle des clôtures de Zariski des  $P_i$  dans  $T$ . Quitte à restreindre  $T$ , on peut supposer que les  $\text{Zar}(P_i)$  sont les images de sections  $\tilde{P}_i \in \tilde{Y}(T)$ . La construction des classes de Chern montre qu'il existe un ouvert  $U \subseteq T$  tel que l'image de  $\sum_i n_i \cdot \tilde{P}_i(u)$  dans  $\text{CH}^{d_Y}(Y_{0,u})$  est égale à  $c_{d_Y}(\text{H}_{\text{dR}}^j(X_{0,u}/Y_{0,u})(\log))$  pour tout  $u \in U$ . On remplace  $T$  par  $U$ .

On munit maintenant le schéma  $Y$  d'un point de base  $P \in Y(L)$ , dont on peut à nouveau supposer qu'il s'étend en une section  $\tilde{P} \in \tilde{Y}(T)$ . Nous écrirons  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}$  pour le schéma sur  $\tilde{Y}$  représentant le foncteur sur les  $T$ -schémas  $S$  :

$$S \mapsto \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ fibré en droites sur } S \times_T \tilde{Y} \text{ rigidifiés le long de } S \times_T \tilde{P}\}.$$

Outre le fait qu'il existe, il est montré dans [18, Th. 3.1] que ce schéma est séparé et localement de type fini sur  $T$ . Il est aussi montré au même endroit que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}$  est une réunion disjointe de sous-schémas ouverts et fermés, qui sont quasi-projectifs au-dessus de  $U$ . Ainsi, quitte à restreindre  $T$  encore une fois, on peut supposer qu'il existe un  $T$ -sous-schéma en groupes  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}^0$  ouvert et fermé de  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}$  tel que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T,s}^0 = \text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}^0$  pour tout  $s \in T$  et tel que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}^0$  est un schéma abélien. On rappelle que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}^0$  est la composante neutre du schéma  $\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}$  et que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}^0$  est ouvert et fermé dans  $\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}$ . On rappelle aussi que  $\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}^0$  est de type fini et géométriquement irréductible sur  $\kappa(s)$  (cf. [22, Exp. VI<sub>A</sub>, Par. 2.3]).

On considère maintenant le morphisme  $\widetilde{\text{alb}} : \tilde{Y} \rightarrow (\text{Pic}_{\tilde{Y}/T}^0)^\vee$  défini par la restriction du fibré universel  $\mathcal{P}$  sur  $\text{Pic}_{\tilde{Y}/T} \times_T \tilde{Y}$ , muni de sa rigidification naturelle  $\mathcal{P}|_{0_{\tilde{Y}} \times_T \tilde{Y}}$ . Par construction,  $\widetilde{\text{alb}}_s$  coïncide avec le morphisme d'Albanese  $\tilde{Y}_s \rightarrow \text{Alb}(\tilde{Y}_s) \simeq (\text{Pic}_{\tilde{Y}_s/T_s}^0)^\vee$  pour tout  $s \in T$ .

Soit maintenant  $\mathfrak{p}$  un point de  $T$  dont le corps résiduel est isomorphe à un corps fini  $\mathbb{F}_q$ , où  $q$  est une puissance de  $p$ . Soit  $\pi : \tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q} \rightarrow \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q$  le morphisme de structure. On dispose alors comme avant de deux suites spectrales : la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique

$$E_1^{rs} = R^s f_* \Omega_{\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}/\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}^r(\log) \implies H_{\text{dR}}^{r+s}(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}/\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log)$$

et la suite spectrale conjuguée logarithmique

$$E_2^{rs} = F_Y^* R^r f_* \Omega_{\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}/\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q}}^s(\log) \implies H_{\text{dR}}^{r+s}(\tilde{X}_{\overline{\mathbb{F}}_q}/\tilde{Y}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\log).$$

Comme la première suite spectrale dégénère par hypothèse, il en est de même de la deuxième. On obtient donc l'égalité

$$(1 - p^{d_Y}) \cdot \text{alb}_*(c_{d_Y}(H_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_{\mathfrak{p}}/\tilde{Y}_{\mathfrak{p}})(\log))) = 0$$

dans  $\text{Alb}(\tilde{Y}_{\mathfrak{p}})(\mathbb{F}_q)$ . Soit maintenant un point fermé  $Q \in T_{\mathbb{Q}}$ . Son corps résiduel  $\kappa(Q)$  est une extension finie de  $\overline{\mathbb{Q}}$ . La clôture de Zariski  $\text{Zar}(Q)$  de  $Q$  dans  $T$  contient alors un ouvert  $V$  qui est isomorphe à un ouvert de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\kappa(Q)}$ , où  $\mathcal{O}_{\kappa(Q)}$  est la clôture intégrale de  $\mathbb{Z}$  dans  $\kappa(Q)$  (utiliser [20, IV, Cor. 6.12.6] et le "Main Theorem" de Zariski, cf. par ex. [34, 4.4, Cor. 4.6]). Par ailleurs, tous les corps résiduels de tous les points de  $V \setminus \{Q\}$  sont des corps finis. On obtient ainsi une variété abélienne  $A := \text{Alb}(\tilde{Y}_Q)$  sur le corps de nombres  $\kappa(Q)$  et un point

$a \in A(\kappa(Q))$ , donné par  $\text{alb}(c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_Q/\tilde{Y}_Q)))$ , avec la propriété suivante. Pour presque toutes les places finies  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_{\kappa(Q)}$ , la réduction modulo  $\mathfrak{p}$  de  $a$  est dans le noyau de  $1 - p^{d_Y}$ . Ici  $p$  est la caractéristique résiduelle de  $\mathfrak{p}$ .

Le théorème de Pink [39, Th. 4.7] implique alors que  $a$  est un point de torsion. Par ailleurs, comme  $a$  est un point de torsion, il est par construction annulé par le nombre  $\text{pgcd}\{1 - p^{d_Y}\}_{p \in I}$  où  $I$  est un ensemble cofini dans  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . Le Lemme 3.2 implique alors que  $N_{d_Y} \cdot a = 0$ , ou autrement dit, que

$$N_{d_Y} \cdot \widetilde{\text{alb}}(c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_Q/\tilde{Y}_Q)(\log))) = 0$$

dans  $\text{Alb}(\tilde{Y}_{\mathfrak{p}})(\overline{\kappa(Q)})$ . Comme les points fermés sont denses dans  $T_{\mathbb{Q}}$ , on conclut que

$$N_{d_Y} \cdot \widetilde{\text{alb}}(c_{d_Y}(\mathbb{H}_{\text{dR}}^j(\tilde{X}_L/\tilde{Y}_L)(\log))) = 0$$

dans  $\text{Alb}(\tilde{Y}_{\mathfrak{p}})(L) \subseteq \text{Alb}(\tilde{Y}_{\mathfrak{p}})(K)$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Passons maintenant à la démonstration de (c).*

On rappelle que le théorème de Rojzman [42] implique que l'application  $\text{alb} : \text{CH}^{d_Y}(Y) \rightarrow \text{Alb}(Y)(K)$  induit un isomorphisme

$$\text{Tor}(\text{CH}^{d_Y}(Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Tor}(\text{Alb}(Y)(K))$$

des sous-groupes de torsion correspondants. Le point (c) est une conséquence de ce résultat et du point (b).

### 3.3 Démonstration de (d) & (e)

*Commençons par le point (d).*

Les calculs faits dans cette sous-section sont inspirés par les calculs faits dans [13]. Nous allons utiliser la notation de la sous-section 2.1. Si  $V$  est un faisceau localement libre, on écrira

$$\Lambda_{-1}(V) := \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \Lambda^k(V)$$

pour la somme alternée des puissances extérieures de  $V$ . Appliquons le théorème d'Adams-Riemann-Roch au complexe de de Rham de  $f$  à pôles logarithmiques le long de  $D$ . On obtient l'égalité

$$\psi^k(\text{Rf}_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) = \text{Rf}_*(\theta^k(f)^{-1} \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))). \quad (10)$$

dans  $K_0(Y)[\frac{1}{k}]$ . On souhaite maintenant expliciter le terme

$$\theta^k(f)^{-1} \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))). \quad (11)$$

Soit  $\{E_u\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $E$  et  $\{D_i\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $D$ . Soit  $\mathcal{O}_{E_0} := \bigoplus_u \mathcal{O}_{E_u}$  et  $\mathcal{O}_{D_0} := \bigoplus_i \mathcal{O}_{D_i}$ . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow (1) & & \downarrow & & \downarrow (2) \\ 0 & \xrightarrow{(3)} & f^* \Omega_Y^1 & \rightarrow & f^* \Omega_Y^1(\log E) & \xrightarrow{f^* \text{Res}_Y} & f^* \mathcal{O}_{E_0} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (4) \\ 0 & \rightarrow & \Omega_X^1 & \rightarrow & \Omega_X^1(\log D) & \xrightarrow{\text{Res}_X} & \mathcal{O}_{D_0} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{(5)} & \Omega_{X/Y}^1 & \rightarrow & \Omega_{X/Y}^1(\log) & \rightarrow & \mathcal{O}_{D_0}/f^* \mathcal{O}_{E_0} \xrightarrow{(6)} 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (12)$$

Seules les flèches numérotées requièrent une justification. La flèche (1) est justifiée par le fait que le morphisme  $f$  est génériquement lisse et par le fait que  $X$  et  $Y$  sont lisses sur  $K$ . La flèche (3) est justifiée par le fait que le morphisme  $f$  est plat. La flèche (4) est l'unique flèche rendant le diagramme commutatif. Cette définition de (4) peut être explicitée de la manière suivante. Soit  $u$  et  $i$  tels que  $D_i \subseteq f^{-1}E_u$ . Du fait que  $D_i$  est une composante irréductible de  $f^{-1}E_u$ , on dispose d'un morphisme

$$a_{u,i} : \mathcal{O}_{f^*E_u} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}.$$

La flèche (4) est alors décrite par la formule

$$\bigoplus_u e_u \mapsto \sum_u \sum_{i, D_i \subseteq f^{-1}E_u} (0, \dots, a_{u,i}(e_u), \dots, 0)$$

où le terme  $a_{u,i}(e_u)$  est d'indice  $i$ . Comme  $f^*E_u$  est un schéma réduit pour tout  $u$  par définition de la semi-stabilité, le morphisme  $a_{u,i}$  est injectif pour tout couple  $u, i$  tel que  $D_i \subseteq f^{-1}E_u$ ; en conséquence de quoi la flèche (4) est injective, d'où la flèche (2). La flèche (5) est maintenant justifiée par le lemme du serpent. La flèche (6) est justifiée par une chasse au diagramme élémentaire.

Revenons maintenant au terme (11). Un examen de la troisième ligne du diagramme (12) donne

$$\theta^k(f)^{-1} = \theta^k(\Omega_{X/Y}^1(\log))^{-1} \otimes \theta^k(\mathcal{O}_{D_0}/f^* \mathcal{O}_{E_0}).$$

et donc le terme (11) peut s'exprimer comme

$$\theta^k(\Omega_{X/Y}^1(\log))^{-1} \otimes \theta^k(\mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0}) \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))). \quad (13)$$

Nous allons démontrer l'équation

$$\theta^k(\mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0}) \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) = \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) \quad (14)$$

qui est le nerf de notre calcul.

Pour ce faire, nous allons d'abord démontrer les quatre lemmes suivants.

**Lemme 3.3.** *Soit  $D_i$  et  $D_j$  des composantes irréductibles distinctes de  $D$ . On suppose que  $f(D_i)$  et  $f(D_j)$  sont contenus dans la même composante irréductible de  $E$ . Alors pour tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $D_i \cap D_j$ , il existe un morphisme surjectif*

$$\Omega_{X/Y}^1(\log) \rightarrow \mathcal{O}_Z$$

de faisceaux.

**Preuve.** On rappelle le fait suivant. Soit  $T$  un schéma et  $\{T_t\}_{t \in \{0, \dots, q\}}$  un ensemble fini de sous-schémas fermés tels que  $\cup_t T_t = T$ . On dispose alors d'un complexe

$$\mathcal{O}_T \rightarrow \bigoplus_t \mathcal{O}_{T_t} \xrightarrow{d} \bigoplus_{t_0 < t_1} \mathcal{O}_{T_{t_0} \cap T_{t_1}} \quad (15)$$

où

$$(d(\alpha))_{t_0, t_1} = \alpha_{t_0}|_{\mathcal{O}_{T_{t_0} \cap T_{t_1}}} - \alpha_{t_1}|_{\mathcal{O}_{T_{t_0} \cap T_{t_1}}}.$$

On déduit de l'existence de ce complexe et de la description de  $d$  l'existence d'une surjection

$$\mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i \cap D_j}.$$

Si l'on compose ce morphisme avec la surjection  $\Omega_{X/Y}^1(\log) \rightarrow \mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0}$  à gauche et avec la surjection  $\mathcal{O}_{D_i \cap D_j} \rightarrow \mathcal{O}_Z$  à droite, on obtient la surjection promise.  $\square$

**Lemme 3.4.** *Soit  $z : Z \hookrightarrow X$  un sous-schéma fermé de  $X$ . Soit  $V$  un faisceau localement libre sur  $X$ . On suppose qu'il existe une suite exacte*

$$V \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Alors

$$z^*(\psi^k(\Lambda_{-1}(V))) = 0$$

dans  $K_0(Z)$ .

**Preuve.** Soit

$$z^*V \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

la restriction de la suite exacte à  $Z$ . Soit  $W$  le noyau du morphisme  $z^*V \rightarrow \mathcal{O}$ . Par construction,  $W$  est localement libre. Par ailleurs, on a l'équation

$$\psi^k(\Lambda_{-1}(z^*V)) = \psi^k(\Lambda_{-1}(W)) \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\mathcal{O})).$$

Comme  $\psi^k(\Lambda_{-1}(\mathcal{O})) = 0$ , on déduit le lemme.  $\square$

**Lemme 3.5.** *Soit  $D_i$  et  $D_j$  des composantes irréductibles distinctes de  $D$ . On suppose que  $f(D_i)$  et  $f(D_j)$  sont contenus dans la même composante irréductible de  $E$ . Soit  $Z$  un sous-schéma fermé de  $D_i \cap D_j$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\theta^k(\mathcal{O}_Z)^n \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) = \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))$$

dans  $K_0(X)[\frac{1}{k}]$ .

On a implicitement identifié les groupes  $K'_0(X)$  et  $K_0(X)$  dans l'énoncé du Lemme 3.5.

**Preuve.** Soit  $z : Z \hookrightarrow X$  l'immersion canonique. Soit  $j : U := X \setminus Z \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complément de  $Z$ .

On dispose d'une suite exacte

$$K'_0(Z) \xrightarrow{Rz_*} K'_0(X) \xrightarrow{j^*} K'_0(U) \rightarrow 0.$$

On rappelle aussi que pour tout schéma  $Q$ , le groupe  $K'_0(Q)$  est naturellement muni d'une structure de  $K_0(Q)$ -module, induite par l'application qui associe à un faisceau cohérent localement libre  $V$  et à un faisceau cohérent  $V'$  le faisceau cohérent  $V \otimes V'$ . On munit le groupe  $K'_0(Z)$  de cette structure de  $K_0(Z)$ -module.

Avec cette convention, on calcule que

$$j^*(\theta^k(\mathcal{O}_Z)^n - 1) = 0.$$

On en déduit qu'il existe un élément  $x \in K'_0(Z)[\frac{1}{k}]$  tel que

$$Rz_*(x) = \theta^k(\mathcal{O}_Z)^n - 1.$$

Ainsi

$$(\theta^k(\mathcal{O}_Z)^n - 1) \otimes \psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) = Rz_*(x \otimes z^*(\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))))).$$

Les Lemmes 3.3 et 3.4 impliquent alors que

$$z^*(\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) = 0. \quad \square$$

**Lemme 3.6.** *Dans  $K'_0(X)$ , le faisceau cohérent  $\mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0}$  est une combinaison linéaire de faisceaux structuraux  $\mathcal{O}_Z$  de sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$ , où  $Z$  a la propriété suivante. On a  $Z \subseteq D_i \cap D_j$  où  $D_i$  et  $D_j$  sont des composantes irréductibles distinctes de  $D$  et  $f(D_i)$  et  $f(D_j)$  sont contenus dans la même composante irréductible de  $E$ .*

**Preuve.** On commence par rappeler l'assertion suivante. Soit  $T$  un schéma réduit et noethérien. Alors  $K'_0(T)$  est engendré par les classes  $\mathcal{O}_Z$ , où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $T$ . Les détails de la démonstration de cette assertion sont laissés au lecteur. Le lemme est une conséquence de l'assertion et du fait que le faisceau  $\mathcal{O}_{D_0}/f^*\mathcal{O}_{E_0}$  est supporté sur le sous-schéma fermé union des  $D_i \cap D_j$ , où  $f(D_i)$  et  $f(D_j)$  sont contenus dans la même composante irréductible de  $E$ .  $\square$

L'équation (14) est maintenant une conséquence du Lemme 3.6 et du Lemme 3.5.

Les équations (13) et (14) mènent pour finir à l'équation

$$\theta^k(f)^{-1}\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) = \theta^k(\Omega_{X/Y}^1(\log))^{-1}\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))$$

qui conclut notre analyse du terme (11). On insère cette dernière égalité dans l'équation (10). On obtient :

$$\begin{aligned} \psi^k(\mathbf{R}f_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) &= \mathbf{R}f_*(\theta^k(f)^{-1}\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) \\ &= \mathbf{R}f_*(\theta^k(\Omega_{X/Y}^1(\log))^{-1}\psi^k(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) = \mathbf{R}f_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'équation

$$\psi^k(\Lambda_{-1}(V)) = \theta^k(V)\Lambda_{-1}(V)$$

valable dans  $K_0(X)$  pour tout faisceau localement libre  $V$  sur  $X$  (cf. [2, Prop. 7.3, p. 269]). On obtient ainsi que

$$c_{\text{tot}}(\psi^k(\mathbf{R}f_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))) = c_{\text{tot}}(\mathbf{R}f_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log)))).$$

L'existence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham montre que

$$\mathbf{R}f_*(\Lambda_{-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log))) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H_{\text{dR}}^k(X/Y)(\log)$$

et on conclut que

$$(k^t - 1) \cdot c_t \left( \sum_{l \geq 0} (-1)^l H_{\text{dR}}^l(X/Y)(\log) \right) = 0$$

dans  $\text{CH}^t(Y)[\frac{1}{k}]$ , pour tout  $t \geq 0$ . Comme ce résultat est valable pour tout  $k \geq 2$ , le Théorème 1.2 (b) est maintenant un conséquence du Lemme 3.2.

*Passons maintenant à la démonstration de (e).*

*On démontre d'abord la première assertion.* Soit  $Y' := \text{Spec } f_* \mathcal{O}_X$  et soit  $g : Y' \rightarrow Y$  le morphisme naturel. Comme le faisceau  $f_* \mathcal{O}_X$  est localement libre (voir Théorème 2.2), le morphisme  $g$  est plat et fini. Soit  $\bar{y} \rightarrow Y$  un point géométrique. Comme les faisceaux  $R^i f_* \mathcal{O}_X$  sont aussi localement libres (toujours le Théorème 2.2), le théorème de semi-continuité (cf. par ex. [26, III, th. 12.11]) montre que

$$Y'_{\bar{y}} \simeq \text{Spec } H^0(X_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{X_{\bar{y}}}).$$

Comme  $X_{\bar{y}}$  est réduit (voir sous-section 2.1), on voit que les fibres géométriques de  $g$  sont réduites. On déduit que  $g$  est étale (cf. [20, IV, par. 17, Cor. 17.6.2, c''])). On remarque maintenant que par construction, on a un isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^0(X/Y)(\log) \simeq g_* \mathcal{O}_{Y'}.$$

Pour démontrer la première assertion de (e), on est donc ramené à la démontrer dans le cas où  $f$  est un morphisme étale et fini. Dans ce cas, l'assertion résulte de (d).

*Passons à la deuxième assertion.*

Il est montré dans [28, 1.3, p. 144] que si les fibres de  $f$  sont de dimension 1, alors le faisceau dualisant relatif de  $f$  est canoniquement isomorphe à  $\Omega_{X/Y}^1(\log)$ . Par dualité de Grothendieck, on obtient un isomorphisme canonique

$$(R^1 f_* \Omega_{X/Y}^1(\log))^\vee \simeq R^0 f_* \mathcal{O}_X.$$

Par ailleurs, comme la suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique dégénère, on a des isomorphismes

$$R^0 f_* \mathcal{O}_X \simeq H_{\text{dR}}^0(X/Y)(\log)$$

et

$$R^1 f_* \Omega_{X/Y}^1(\log) \simeq H_{\text{dR}}^2(X/Y)(\log).$$

On applique maintenant (d). On obtient

$$N_t \cdot c_t(-H_{\text{dR}}^1(X/Y)(\log) + R^0 f_* \mathcal{O}_X + (R^0 f_* \mathcal{O}_X)^\vee) = 0.$$

La deuxième assertion résulte maintenant de la première assertion et du lemme suivant.

**Lemme 3.7.** *Soit  $e, e' \in K_0(Y)$ . On suppose que  $N_l \cdot c_l(e) = 0$  et  $N_l \cdot c_l(e') = 0$  pour tout  $l \geq 0$ . Alors  $N_l \cdot c_l(e + e') = N_l \cdot c_l(-e) = 0$  pour tout  $l \geq 0$ .*

**Preuve.** Nous allons utiliser la divisibilité

$$\text{pgcd}(N_j, N_k) | N_{j+k}$$

valable pour tout  $j, k \geq 0$  (voir [16, Rem. 19.5, p. 66]). On calcule

$$N_l \cdot c_l(e + e') = \sum_{j+k=l} (N_l \cdot c_j(e) c_k(e'))$$

et comme par hypothèse  $\text{pgcd}(N_j, N_k) \cdot c_j(e) c_k(e') = 0$  pour tout  $j, k \geq 0$ , on conclut que  $N_l \cdot c_l(e + e') = 0$ . La démonstration du fait que  $N_l \cdot c_l(-e) = 0$  est similaire.  $\square$

### 3.4 Démonstration de (f)

Soit  $G$  un groupe. Pour tout anneau commutatif  $A$ , nous noterons  $R_A(G)$  le groupe de Grothendieck des représentations linéaires de  $G$  dans des  $A$ -modules libres. On rappelle qu'une représentation linéaire de  $G$  dans un  $A$ -module est la donnée d'un  $A$ -module  $M$  et d'un homomorphisme de groupes  $G \rightarrow \text{GL}_A(M)$  de  $G$  dans le groupes des automorphismes  $A$ -linéaires de  $M$ . Le produit tensoriel des représentations munit le groupe  $R_A(G)$  d'une structure d'anneau commutatif et le produit extérieur le munit d'une structure de  $\lambda$ -anneau (voir par ex. [45] pour tout cela).

Soit  $M$  une variété quasi-projective lisse sur  $\mathbb{C}$ . On munit  $M(\mathbb{C})$  de sa structure canonique d'espace analytique complexe. Si  $V$  est un faisceau cohérent localement libre sur  $M$ , on écrira  $V^{\text{an}}$  pour le fibré vectoriel holomorphe associé sur  $M(\mathbb{C})$ ; si  $\nabla$  est une connexion sur  $V$ , on écrira  $\nabla^{\text{an}}$  pour la connexion analytique sur  $V^{\text{an}}$  associée à  $\nabla$ . On rappelle que Deligne a démontré le théorème suivant :

le foncteur  $(V, \nabla) \mapsto (V^{\text{an}}, \nabla^{\text{an}})$  que l'on vient de décrire induit une équivalence entre la catégorie additive des faisceaux cohérents localement libres munis d'une connexion intégrable régulière et la catégorie additive des fibrés vectoriels holomorphes munis d'une connexion (analytique) intégrable (cf. [9, II, Th. 5.9, p. 97]). Pour la définition d'une connexion intégrable régulière, voir [9, II, Prop. 4.4] (cette notion est due à Griffiths). Deligne démontre aussi que la catégorie des faisceaux cohérents localement libres munis d'une connexion intégrable régulière est fermée par produit tensoriel, puissances extérieures et Hom interne (cf. [9, II, Prop. 4.6, p. 90]).

Soit maintenant  $m \in M(\mathbb{C})$  un point de base. Comme la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes sur  $M(\mathbb{C})$  munis d'une connexion intégrable est équivalente à la catégorie des représentations linéaires du groupe fondamental  $\pi_1(M(\mathbb{C}), m)$ , le théorème de Deligne fournit un morphisme canonique de groupes

$$R_{\mathbb{C}}(\pi_1(M(\mathbb{C}), m)) \rightarrow K_0(M).$$

Par construction, ce morphisme est un morphisme de  $\lambda$ -anneaux.

**Proposition 3.8.** *On suppose que  $G$  est fini. Si  $\text{pgcd}(k, \#G) = 1$ , l'opération d'Adams  $\psi^k : R_{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{Q}}(G)$  est l'identité.*

**Preuve.** On suppose tout d'abord que  $G$  est cyclique. Soit  $n := \#G$ . Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation de  $G$  dans un espace vectoriel complexe  $V$ . Par construction, on a  $\text{Tr}(\rho(g)) \in \mathbb{Q}(\mu_n)$  pour tout  $g \in G$ . Pour tout  $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  notons  $\sigma_k \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)|\mathbb{Q})$  l'élément associé. Nous allons démontrer que

$$\text{Tr}(\psi^k(\rho)(g)) = \sigma_k(\text{Tr}(\rho(g))). \tag{16}$$

Ici  $\psi^k : R_{\mathbb{C}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$  est la  $k$ -ième opération d'Adams sur  $R_{\mathbb{C}}(G)$ . Comme les deux côtés de cette égalité sont additifs pour les sommes directes de représentations, on est ramené au cas où  $\rho$  est de dimension 1. Dans ce cas-là, l'égalité est une conséquence des définitions.

Revenons aux hypothèses de la proposition. Vu que la trace et  $\psi^k(\cdot)$  sont additifs pour les sommes directes de représentations, il suffit, pour démontrer la proposition, de montrer l'égalité

$$\text{Tr}(\psi^k(\rho)(g)) = \text{Tr}(\rho(g)) \tag{17}$$

pour toute représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  dans un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{Q}$ . Pour un  $g$  donné, les deux membres de cette égalité restent inchangés si l'on remplace  $G$  par un de ses sous-groupes contenant  $g$ . On peut ainsi sans restriction de généralité supposer que  $G$  est un groupe cyclique engendré par  $g$ . Comme le morphisme naturel d'extension des scalaires  $R_{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$  préserve les traces et est un morphisme de  $\lambda$ -anneaux, il suffit de démontrer l'équation

$$\mathrm{Tr}(\psi^k(\rho_{\mathbb{C}})(g)) = \mathrm{Tr}(\rho_{\mathbb{C}}(g))$$

pour la représentation complexe  $\rho_{\mathbb{C}}$  associée à  $\rho$ . Comme  $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathbb{C}}(g)) \in \mathbb{Q}$ , cette dernière équation est une conséquence de (16).  $\square$

On peut maintenant démontrer (f). Soit  $y \in Y(\mathbb{C})$  un point de base. Soit  $V := (R^j f(\mathbb{C})_* \mathbb{Q})_y$ . Soit  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$  l'image de la représentation de monodromie  $\pi_1(Y(\mathbb{C}), y) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  associée à  $R^j f(\mathbb{C})_* \mathbb{Q}$ . Le fibré vectoriel holomorphe associé à cette représentation est isomorphe au fibré  $H_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)^{\mathrm{an}}$ . Par ailleurs, il existe une connexion intégrable régulière  $\nabla$  sur  $H_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)$  telle que  $\nabla^{\mathrm{an}}$  est isomorphe à la connexion intégrable (analytique) sur  $H_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)^{\mathrm{an}}$  qui est induite par la représentation de monodromie. Ceci est une conséquence de résultats de Griffiths (cf. [17]) et Katz-Oda (cf. [31]). Voir [9, III, Th. 7.9] pour la démonstration. On appelle *connexion de Gauss-Manin* la connexion  $\nabla$ .

Soit  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  le morphisme d'inclusion. On dispose de morphismes naturels de  $\lambda$ -anneaux

$$R_{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{Q}}(\pi_1(Y(\mathbb{C}), y)) \rightarrow R_{\mathbb{C}}(\pi_1(Y(\mathbb{C}), y)) \rightarrow K_0(Y).$$

Soit  $r : R_{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow K_0(Y)$  le morphisme composé. Les propriétés de la connexion de Gauss-Manin mentionnées plus haut impliquent que  $r(\rho) = H_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)$  dans  $K_0(Y)$ . En tenant compte de la Proposition 3.8, on voit ainsi que

$$\begin{aligned} 0 &= c_t(r(\psi^p(\rho))) - c_t(r(\rho)) = c_t(\psi^p(r(\rho))) - c_t(r(\rho)) \\ &= (p^t - 1)c_t(r(\rho)) = (p^t - 1)c_t(H_{\mathrm{dR}}^j(X/Y)) \end{aligned}$$

pour presque tout nombre premier  $p$ . On conclut au moyen du Lemme 3.2.

## 4 Démonstration de (g) & (h)

*Commençons par la démonstration de (g).*

Soit encore une fois  $L$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$  (comme corps) tel que le triplet  $f : X \rightarrow Y$  possède un modèle  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  sur  $L$ . Soit  $T$  un schéma affine, intègre, lisse et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , dont le corps de fonctions est isomorphe à  $L$ . Comme avant, quitte à remplacer  $T$  par l'un de ses ouverts, on peut supposer qu'il existe des modèles lisses et projectifs  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  de  $X_0$  et  $Y_0$  sur  $T$  et qu'il existe un  $T$ -morphisme semi-stable et projectif  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  qui est un modèle de  $f_0$ . Toujours quitte à réduire la taille de  $T$ , on peut supposer que la suite spectrale de Hodge vers de Rham de  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  dégénère et que les faisceaux de cohomologie de de Rham relative correspondants sont localement libres. Au vu des hypothèses de (g), on peut aussi, quitte à restreindre  $T$ , supposer que la classe de Chern  $c_t(\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^j(\tilde{X}/\tilde{Y})(\log)) \in \mathrm{CH}^t(\tilde{Y})$  est de torsion.

Soit  $\mathfrak{p}$  un point de  $T$  et soit  $\bar{\mathfrak{p}} \rightarrow T$  le point géométrique associé à une clôture algébrique de  $\kappa(\mathfrak{p})$ . Soit  $\bar{L}$  un clôture algébrique de  $L$ . Soit  $l$  un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle de  $\mathfrak{p}$ . Nous allons décrire la construction d'un *homomorphisme de spécialisation*

$$\sigma : \mathrm{CH}^t(Y_{0,\bar{L}})[l^\infty] \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{\bar{\mathfrak{p}}})[l^\infty].$$

Cet homomorphisme n'est pas canonique et dépend du choix de certains plongements (voir aussi [44, Introduction] pour une autre description de  $\sigma$ ). Soit  $T_1 \rightarrow T$  l'éclatement de  $T$  en  $\mathfrak{p}$ . Soit  $\mathfrak{p}_1$  le point générique de la fibre spéciale de  $T_1$ . Soit  $R$  l'anneau local en  $\mathfrak{p}_1$  et soit  $J$  l'idéal maximal de  $R$ . Cet anneau est par construction un anneau de valuation discret et  $\mathrm{Frac}(R) = L$ . Soit enfin  $\tilde{Y}_1 := \tilde{Y} \times_T \mathrm{Spec} R$ . On dispose d'un homomorphisme de spécialisation

$$\sigma_L : \mathrm{CH}^t(Y_0) \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\kappa(\mathfrak{p}_1)})$$

obtenu en associant à chaque sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $Y_0$  la classe de la restriction de  $\mathrm{Zar}_{\tilde{Y}_1}(Z)$  à  $\tilde{Y}_{1,\kappa(\mathfrak{p}_1)}$ . Voir [15, 20.3] pour plus de détails. Soit  $\bar{J}$  un idéal maximal de la clôture entière de  $R$  dans  $\bar{L}$ . Pour chaque extension  $M$  de  $L$  plongée dans  $\bar{L}$ , soit  $R'_M$  la clôture intégrale de  $R$  dans  $M$  et soit  $R_M$  la localisation de  $R'_M$  en  $\bar{J} \cap R'_M$ . Notons  $J_M$  l'idéal maximal de  $R_M$  et  $\lambda_M$  le corps résiduel associé. Si  $M$  est un extension finie de  $L$  alors l'anneau  $R_M$  est à nouveau un anneau de valuation discret. On dispose ainsi pour chaque  $M$  fini sur  $L$  d'un homomorphisme de spécialisation  $\sigma_M : \mathrm{CH}^t(Y_{0,M}) \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_M})$  et si  $M' \supseteq M$

est une paire emboîtée d'extensions, on a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^t(Y_{0,M}) & \xrightarrow{\sigma_M} & \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^t(Y_{0,M'}) & \xrightarrow{\sigma_{M'}} & \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_{M'}}) \end{array}$$

On vérifie que les homomorphismes naturels

$$\varinjlim_{M,[M:L]<\infty} \mathrm{CH}^t(Y_{0,M}) \rightarrow \mathrm{CH}^t(Y_{0,\bar{L}})$$

et

$$\varinjlim_{M,[M:L]<\infty} \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_M}) \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_{\bar{L}}}).$$

sont des isomorphismes. On obtient ainsi un homomorphisme de spécialisation

$$\sigma_{\bar{L}} : \mathrm{CH}^t(Y_{0,\bar{L}}) \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_{\bar{L}}})$$

Choisissons un plongement  $\kappa(\bar{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \lambda_{\bar{L}}$  compatible au plongement canonique  $\kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}_1)$ . On peut montrer que l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{\bar{\mathfrak{p}}}) \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_{\bar{L}}})$$

induit un isomorphisme

$$\tau_1 : \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{\bar{\mathfrak{p}}})[l^\infty] \rightarrow \mathrm{CH}^t(\tilde{Y}_{1,\lambda_{\bar{L}}})[l^\infty].$$

De même, le choix d'un  $L$ -plongement  $\bar{L} \hookrightarrow K$  induit un isomorphisme

$$\tau_2 : \mathrm{CH}^t(Y_{0,\bar{L}})[l^\infty] \rightarrow \mathrm{CH}^t(Y)[l^\infty].$$

Pour ce résultat non-trivial, voir [33]. On définit pour finir

$$\sigma := (\tau_1)^{-1} \circ \sigma_{\bar{L}} \circ (\tau_2)^{-1}.$$

Par ailleurs, le théorème du changement de base propre en cohomologie étale implique l'existence d'un homomorphisme de spécialisation canonique

$$\sigma_{\text{ét}} : \mathrm{H}_{\text{ét}}^{2t-1}(Y, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(t)) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^{2t-1}(\tilde{Y}_{\bar{\mathfrak{p}}}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(t))$$

qui est un isomorphisme. Le théorème de spécialisation pour l'application d'Abel-Jacobi de Bloch (cf. [6, Prop. 3.8]) implique alors que  $\lambda_l^t \circ \sigma = \sigma_{\text{ét}} \circ \lambda_l^t$ .

Si  $G$  est un groupe abélien et  $g \in G$  est un élément de torsion, notons  $g[l]$  la partie  $l$ -primaire de  $g$ .

**Lemme 4.1.** *Soit  $F$  un fibré cohérent localement libre sur  $\tilde{Y}$ . Supposons que  $c_t(F)$  est de torsion. Alors*

$$\sigma(c_t(F_K)[l]) = c_t(F_{\bar{p}})[l]$$

Le Lemme 4.1 est une conséquence du fait que les classes de Chern commutent aux images réciproques de fibrés localement libres par des morphismes de schémas. Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur.

En utilisant le Lemme 4.1, on peut, par un argument tout semblable à celui apparaissant dans la preuve de (a), conclure que pour tout nombre premier  $l$ , l'égalité

$$(1 - p^t) \cdot \lambda_l^t(c^t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)))[l] = 0$$

est vérifiée pour presque tout nombre premier  $p$ . On invoque alors le Lemme 3.2 et on voit que

$$N_t \cdot \lambda_l^t(c^t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)))[l] = N_t \cdot \lambda_l^t(c^t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))) = 0$$

pour tout nombre premier  $l$ . Autrement dit,

$$N_t \cdot \lambda^t(c^t(H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log))) = 0,$$

ce qu'on voulait démontrer.

*Passons maintenant à la démonstration de (h).* Dans [8, Par. 1.2, Cor. 4], il est démontré que l'application

$$\lambda^2 : \text{Tor}(\text{CH}^2(Y)) \rightarrow \bigoplus_{l \text{ premier}} \text{H}_{\text{ét}}^3(Y, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

est injective. On voit donc que (g) implique (h).

## 5 Démonstration de (i)

Un théorème de F. Lecomte (voir [33]) affirme que le morphisme naturel

$$\text{Tor}(\text{CH}^t(Y)) \rightarrow \text{Tor}(\text{CH}^t(Y_L))$$

est un isomorphisme. Par ailleurs, on dispose du lemme suivant, qui a été suggéré par le rapporteur de l'article.

**Lemme 5.1.** *Le noyau du morphisme naturel*

$$\phi_{K,L} : \text{CH}^t(Y) \rightarrow \text{CH}^t(Y_L)$$

*est un groupe de torsion.*

**Preuve.** Soit  $y \in \ker \phi_{K,L}$ . Soit  $Z = \sum_{n_i} Z_i$  un cycle algébrique représentant  $y$ . Comme  $Y_L$  est de type fini sur  $L$  et que  $Z$  a un nombre fini de composantes, on voit qu'il existe un corps  $L_0$  de type fini (comme corps) sur  $K$  tel que  $\phi_{K,L_0}(y) = 0$  dans  $\text{CH}^t(Y_{L_0})$ . On en déduit qu'il suffit de démontrer que le noyau du morphisme  $\phi_{K,L_0}$  est de torsion, lorsque  $L_0$  est une extension de type fini (comme corps) de  $K$ .

Supposons que  $L_0|K_2|K_1|K$  est une suite d'extensions de corps.

Supposons le temps de ce paragraphe que l'extension  $K_2|K_1$  est purement transcendante et de degré de transcendance 1. Soit alors  $\{b\}$  un élément de  $K_2$  constituant une base de transcendance de  $K_2$  sur  $K_1$ . Soit  $S := \text{Spec } K_1[b]$ . Soit  $s \in S$  l'image d'un point  $K_1$ -rationnel. On dispose alors d'un homomorphisme dit de spécialisation  $\sigma_s : \text{CH}^t(Y_{K_2}) \rightarrow \text{CH}^t(Y_s) = \text{CH}^t(Y_{K_1})$  tel que  $\sigma_s \circ \phi_{K_1,K_2} = \text{Id}_{\text{CH}^t(Y_{K_1})}$  (voir [15, 20.3]). On en déduit que l'homomorphisme  $\phi_{K_1,K_2}$  est injectif et en particulier que  $\ker \phi_{K_1,K_2}$  est de torsion.

Supposons le temps du prochain paragraphe que l'extension  $K_2|K_1$  est une extension algébrique de degré fini. Soit alors  $\pi : Y_{K_2} \rightarrow Y_{K_1}$  le morphisme naturel. Comme  $K_2$  est une  $K_1$ -algèbre de type fini, on dispose de la formule de projection

$$\pi_*(\phi_{K_1,K_2}(u) \cdot v) = u \cdot \pi_*(v)$$

dans  $\text{CH}^\bullet(Y_{K_1})$  (voir [15, chap. 8, Prop. 8.3]). Par ailleurs, on a  $\pi_*(1) = [K_2 : K_1]$  par construction. On en conclut que  $\ker \phi_{K_1,K_2}$  est annulé par  $[K_2 : K_1]$  et donc de torsion.

De manière générale, on obtient  $L_0$  à partir de  $K$  par un nombre fini d'extension successives, qui sont soit algébriques finies, soit purement transcendantes de degré de transcendance 1. On peut donc conclure.  $\square$

Combiné avec le théorème de F. Lecomte, le Lemme ci-dessus implique que le morphisme  $\phi_L$  est injectif. Ceci implique (i).

## 6 Démonstration de (j)

Le point (i) du Théorème 1.2 et le principe de Lefschetz montre que nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que  $K = \mathbb{C}$ .

### 6.1 Rappels sur les connexions singulières et les morphismes semi-stables dans le cadre analytique complexe

Nous commençons par quelques rappels sur le résidu d'une connexion à singularités logarithmiques le long d'un diviseur à croisements normaux sur une variété analytique complexe. Pour plus de détails, voir [9].

Soit  $W^\times$  une variété analytique complexe lisse de dimension  $m^\times$ . Soit  $D^\times \subseteq W^\times$  un diviseur à croisements normaux. On rappelle que cela signifie qu'autour de chaque point  $w \in W^\times$ , il existe un système de coordonnées holomorphes  $x_1, \dots, x_{m^\times}$  tel que  $D^\times$  soit décrit par une équation  $x_1 \dots x_{k^\times}$  dans ce système. Soit  $j^\times : W^{\times,*} := W^\times \setminus D^\times \hookrightarrow W^\times$ . On notera  $\Omega_{W^\times}(\log D^\times)$  le sous-faisceau de  $j_*^\times \Omega_{W^{\times,*}}$  des formes différentielles à singularités logarithmiques le long de  $D^\times$  (voir [9, chap. II, def. 3.1] pour la définition, qui est analogue à celle donnée au paragraphe 2.1). Le faisceau  $\Omega_{W^\times}(\log D^\times)$  est muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{O}_{W^\times}$ -module et est cohérent et localement libre. Supposons le temps de la prochaine phrase que  $D^\times$  est une union finie de sous-variétés analytiques complexes lisses  $D_i^\times$  de codimension 1. On dispose alors d'une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents

$$0 \rightarrow \Omega_{W^\times} \rightarrow \Omega_{W^\times}(\log D^\times) \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_i \mathcal{O}_{D_i^\times} \rightarrow 0$$

(voir [9, chap. II, (3.7.2)] pour la définition de Res, qui est analogue à celle donnée dans le paragraphe 2.1). Soit maintenant  $V$  un fibré analytique cohérent localement libre sur  $W^{\times,*}$ . On suppose que  $V$  est muni d'une connexion  $\nabla_V : V \rightarrow \Omega_{W^{\times,*}} \otimes_{\mathcal{O}_{W^{\times,*}}} V$ . Soit  $\bar{V}$  une extension localement libre arbitraire de  $V$  à  $W^\times$ . Par la formule de projection et par adjonction, on dispose de flèches

$$\bar{V} \rightarrow j_*^\times V \xrightarrow{j_*^\times \nabla_V} j_*^\times (\Omega_{W^{\times,*}} \otimes V) \xrightarrow{\sim} j_*^\times (\Omega_{W^{\times,*}}) \otimes \bar{V}$$

et par ailleurs, on dispose par définition d'un monomorphisme

$$\Omega_{W^\times}(\log D^\times) \otimes \bar{V} \hookrightarrow j_*^\times (\Omega_{W^{\times,*}}) \otimes \bar{V}$$

On dit que  $\nabla_V$  est à croissance logarithmique le long de  $D^\times$  pour l'extension  $\bar{V}$  si la flèche  $\bar{V} \rightarrow j_*^\times(\Omega_{W^\times, *}) \otimes \bar{V}$  ci-dessus se factorise par une flèche  $\bar{V} \rightarrow \Omega_{W^\times}(\log D^\times) \otimes \bar{V}$ .

Le choix d'une base trivialisante  $b_1, \dots, b_v$  de  $\bar{V}$  dans un ouvert  $O$  de  $W^\times$  donne lieu à une section  $\sigma_B$  de  $\text{End}(\bar{V}) \otimes \Omega_{W^\times}$  dans  $O \cap W^{\times, *}$ ; sous forme matricielle, les colonnes de  $\sigma_B$  sont données par les vecteurs  $\nabla_V(b_l|_{W^{\times, *}})$  de formes différentielles. Lorsque  $\nabla_V$  est à croissance logarithmique le long de  $D^\times$  et que le morphisme résidu  $\text{Res}$  existe, on peut composer  $\sigma_B$  avec  $\text{Res}$  pour obtenir une section de  $\text{End}(\bar{V}|_{D_i^\times \cap O})$  sur  $D_i^\times \cap O$ . Cette section est indépendante du choix de la base  $b_1, \dots, b_v$  à cause de la règle de Leibniz. On obtient ainsi par recollement un élément  $\text{Res}_{D_i^\times, \bar{V}}(\nabla_V) \in \text{End}(\bar{V}|_{D_i^\times})$ .

Supposons le temps de la prochaine phrase que  $\nabla_V$  est à croissance logarithmique le long de  $D^\times$  pour  $\bar{V}$ . On dit alors que  $\nabla_V$  est à résidus nilpotents le long de  $D^\times$  si pour tout  $P \in D^\times$ , il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $P$  tel que

- $D^\times \cap O$  est une union de sous-variétés analytiques lisses  $D_i^\times$ ;
- pour tout  $i$  l'endomorphisme  $\text{Res}_{D_i^\times, \bar{V}|_O}(\nabla_V|_{O \setminus (D^\times \cap O)})$  est nilpotent.

**Théorème 6.1** (Deligne). *Supposons que  $\nabla_V$  est intégrable. Supposons aussi que la représentation linéaire complexe du groupe fondamental  $\pi_1(W^\times \setminus D^\times)$  de  $W^\times \setminus D^\times$  associée à  $(V, \nabla_V)$  est localement unipotente. Il existe alors une unique extension  $\tilde{V}$  de  $V$  à  $W$  telle que  $\nabla_V$  est à croissance logarithmique et à résidus nilpotents le long de  $D^\times$  pour  $\tilde{V}$ . La flèche  $V \mapsto \tilde{V}$  est fonctorielle en  $(V, \nabla_V)$  et compatible aux opérations  $\otimes$  et  $\underline{\text{Hom}}(\cdot, \cdot)$ .*

Nous disons qu'une représentation linéaire  $\pi_1(W^\times \setminus D^\times) \rightarrow \text{GL}(V_0)$  dans un espace vectoriel complexe  $V_0$  est localement unipotente si pour tout point  $w^\times$  de  $W^\times$  il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $w^\times$  tel que l'image de la composition des applications  $\pi_1(O \setminus D^\times \cap O) \rightarrow \pi_1(W^\times \setminus D^\times)$  et  $\pi_1(W^\times \setminus D^\times) \rightarrow \text{GL}(V_0)$  est constituée d'endomorphismes unipotents (pour n'importe quel choix d'un point de base dans  $O \setminus D^\times \cap O$ ).

Le Théorème 6.1 est une conséquence de [9, chap. II, Prop. 5.2, p. 91].

**Lemme 6.2.** *On suppose que la connexion  $\nabla_V$  est à croissance logarithmique le long de  $D^\times$  pour l'extension  $\bar{V}$ . Alors la connexion  $\nabla_V$  est à résidus nilpotents le long de  $D^\times$  (pour  $\tilde{V}$ ) si et seulement si pour tout  $i$  il existe*

- un ouvert dense  $F_i \subseteq D_i^\times$ ;

- pour tout  $P \in F_i$ , une sous-variété analytique complexe lisse  $i_P : C_P \hookrightarrow W^\times$  de dimension 1 de  $W^\times$ , coupant  $D_i^\times$  transversalement en  $P$  ;
- pour tout  $P \in F_i$ , la connexion  $i_P^* \nabla_V$  sur  $C_P \cap W^{\times,*}$  est à résidus nilpotents le long de  $P$  (pour  $i_P^* \bar{V}$ ).

**Preuve.** Laisée au lecteur.  $\square$

Soit maintenant  $Z^\times$  une variété analytique complexe lisse de dimension  $n^\times$  et  $E^\times \subseteq Z^\times$  un diviseur à croisements normaux. Soit  $g^\times : W^\times \rightarrow Z^\times$  une application holomorphe. On dit que  $g^\times$  est *semi-stable relativement à  $D^\times$  et  $E^\times$*  si et seulement si pour tout  $w \in W^\times$  il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} W^\times & \longleftarrow & U^\times & \xrightarrow{r} & \mathbb{C}^{m^\times} \\ \downarrow g^\times & & \downarrow & & \downarrow \sigma \\ Z^\times & \longleftarrow & V^\times & \xrightarrow{l} & \mathbb{C}^{n^\times} \end{array}$$

où toutes les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et

- l'image de  $U^\times$  contient  $w$  ;
- $D^\times$  (resp.  $E^\times$ ) est donné par l'équation  $x_1 \dots x_{k^\times}$  (resp.  $y_1 \dots y_{p^\times}$ ) dans  $U^\times$  (resp.  $V^\times$ ) ;
- le morphisme  $\sigma$  est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \dots, x_{m^\times}) &= (x_1 x_2 \cdots x_{m_1^\times}, x_{m_1^\times+1} x_{m_1^\times+2} \cdots x_{m_2^\times}, \\ &\quad \dots, x_{m_{p^\times-1}^\times+1} \cdots x_{m_{p^\times}^\times}, x_{m_{p^\times}^\times+t_1}, x_{m_{p^\times}^\times+t_2}, x_{m_{p^\times}^\times+t_3}, \dots, x_{m_{p^\times}^\times+t_{n^\times-p^\times}}) \end{aligned}$$

où  $m_{p^\times}^\times = k^\times$  et  $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n^\times-p^\times} \leq m^\times - k^\times$ .

Soit  $i_{\text{ns}}^\times : W_{\text{ns}}^\times \hookrightarrow W^\times$  l'ouvert de lissité de  $g^\times$ . On notera que  $W_{\text{ns}}^\times$  coïncide avec le complément des intersections de composantes de  $D^\times$ . On écrira comme dans la situation algébrique

$$H_{\text{dR}}^j(W^\times/Z^\times)(\log) := R^j g_*^\times (i_{\text{ns},*}^\times \Omega_{W_{\text{ns}}^\times/Z^\times}^\bullet).$$

**Théorème 6.3** (Steenbrink). *On suppose que  $g^\times$ ,  $W^\times$  et  $Z^\times$  sont comme ci-dessus et que  $n^\times = 1$ . Alors la connexion de Gauss-Manin sur  $H_{\text{dR}}^j(W^\times/Z^\times)(\log)|_{Z^\times \setminus E^\times}$  est à singularités logarithmiques le long de  $E^\times$  pour l'extension  $H_{\text{dR}}^j(W^\times/Z^\times)(\log)$ . Elle est aussi à résidus nilpotents le long de  $E^\times$ .*

**Preuve.** Voir [46, (2.19), (2.20)].  $\square$

## 6.2 Démonstration de (j)

Soit maintenant  $\nabla_{\text{GM}}^j$  la connexion de Gauss-Manin sur  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)|_{Y \setminus E}$ . On sait (voir [28, (b), p. 140]) que la connexion  $\nabla_{\text{GM}}^{j,\text{an}}$  sur  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)^{\text{an}}|_{Y \setminus E}$  est à singularités logarithmiques le long de  $E(\mathbb{C})$  pour l'extension  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)^{\text{an}}$ .

**Lemme 6.4.** *Soit  $P \in E(\mathbb{C})$  un point de  $E(\mathbb{C})$  qui ne se trouve que sur une seule composante de  $E$ . Il existe alors  $i : C \hookrightarrow Y$ , une immersion dans  $Y$  d'une sous-variété variété complexe lisse  $C$  de dimension 1, telle que*

- (1)  $C$  rencontre  $E$  transversalement en  $P$  et  $E \cap C = P$  ;
- (2) le morphisme  $f_C : X_C \rightarrow C$  obtenu par changement de base est semi-stable relativement à  $X_C \cap D$  et  $E \cap C$  ;
- (3) on dispose d'un isomorphisme canonique de faisceaux cohérents

$$H_{\text{dR}}^j(X_C/C)(\log) \simeq i^* H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)$$

*compatible avec leurs connexions de Gauss-Manin respectives.*

**Preuve.** On utilise les notations et hypothèses du diagramme (4). On fixe  $W = X$ ,  $Z = Y$ ,  $S = \text{Spec } \mathbb{C}$  et  $g = f$ . Choisissons une sous-variété lisse  $C$  de dimension 1 quelconque dans  $Y$ , telle que  $C$  satisfait (1). On peut obtenir une telle courbe en choisissant un système de paramètres dans l'anneau local  $\mathcal{O}_P$  de  $Y$  en  $P$ . Soit  $V_C$  la courbe obtenue dans  $V$  par changement de base. Par abus de notation, notons aussi  $P \in V(\mathbb{C})$  un point dont l'image est  $P$ . Soit  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}^n$  les coordonnées de  $P$ . Il existe par hypothèse  $r_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $P_{r_0} = 0$  et  $P_r \neq 0$  si  $r \neq r_0$ . Supposons pour simplifier les notations que  $r_0 = 1$ . Enfin, choisissons  $C$  de telle manière que l'espace tangent de  $V_C$  en  $P$  soit engendré par  $\delta y_1$ .

Considérons maintenant la courbe  $C_0$  dans  $V$  donnée par les équations  $\{y_i = P_i\}_{i>1}$ . L'image réciproque  $U_{C_0}$  de  $C_0$  par  $f_U = g_U$  est l'image réciproque par  $U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^m$  du produit au-dessus de  $\text{Spec } \mathbb{C}$  d'un schéma lisse et de l'espace affine  $\mathbb{A}^{m_1}$ . Le schéma  $U_{C_0}$  est donc lisse sur  $\mathbb{C}$ .

Revenons à la courbe  $V_C$ . L'image réciproque  $U_C$  de  $V_C$  dans  $U$  est lisse sur  $\mathbb{C}$ . En effet, elle est lisse en tout point en dehors de la fibre en  $P$  du morphisme  $U_C \rightarrow V_C$  ; par ailleurs, on dispose par construction d'un isomorphisme de schémas

$$U_C \times_{V_C} \text{Spec } \mathcal{O}_{V_C, P} / \mathfrak{m}^2 \simeq U_{C_0} \times_{C_0} \text{Spec } \mathcal{O}_{C_0, P} / \mathfrak{m}^2$$

où  $\text{Spec } \mathcal{O}_{C_0, P}$  (resp.  $\text{Spec } \mathcal{O}_{V_C, P}$ ) est l'anneau local de  $C_0$  en  $P$  (resp. l'anneau local de  $V_C$  en  $P$ ) et  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{C_0, P}$  (resp.  $\mathcal{O}_{V_C, P}$ ). Ceci implique

que pour tout point  $Q$  sur la fibre de  $U_C$  au-dessus de  $P$ , les espaces tangents de Zariski de  $Q$  dans  $U_C$  et dans  $U_{C_0}$  coïncident. Par ailleurs le morphisme  $U_C \rightarrow V_C$  est plat (car il est le changement de base d'un morphisme plat) et donc pour tout point  $Q$  comme plus haut, les dimensions des anneaux locaux en  $Q$  dans  $U_C$  et  $U_{C_0}$  coïncident. On conclut en utilisant la définition d'un anneau local régulier que  $U_C$  est partout régulier et donc lisse sur  $\mathbb{C}$ .

On voit donc que  $X_C$  est lisse sur  $\mathbb{C}$  et plat sur  $C$ ; par ailleurs, les fibres géométriques de  $X_C \rightarrow C$  sont réduites et elles sont soit lisses, soit des diviseurs à croisements normaux. D'après [28, par 1.2, p. 143], ceci implique que  $X_C \rightarrow C$  est semi-stable.

Comme par construction, l'ouvert de lissité de  $X_C \rightarrow C$  est la restriction de l'ouvert de lissité  $X_{\text{ns}}$  de  $f$ , on dispose aussi d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{\text{ns}} \cap X_C & \xrightarrow{z} & X_{\text{ns}} \\ \downarrow i_{\text{ns},C} & & \downarrow i_{\text{ns}} \\ X_C & \xrightarrow{i_X} & X \\ \downarrow f_C & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

où tous les carrés sont cartésiens et  $i_{\text{ns},C}$  est l'immersion de l'ouvert de lissité de  $f_C$ . Enfin, on a l'isomorphisme standard de complexes

$$\Omega_{X_{\text{ns}} \cap X_C / C}^\bullet \simeq z^* \Omega_{X_{\text{ns}} / Y}^\bullet$$

et donc, par unicité des extensions localement libres dans la présente situation,

$$i_{\text{ns},C,*}(\Omega_{X_{\text{ns}} \cap X_C / C}^\bullet) \simeq i_X^*(i_{\text{ns},*}(\Omega_{X_{\text{ns}} / Y}^\bullet)).$$

On en déduit que

$$H_{\text{dR}}^j(X_C/C)(\log) \simeq R^j f_{C,*}(i_X^*(i_{\text{ns},*}(\Omega_{X_{\text{ns}} / Y}^\bullet)))$$

On rappelle maintenant que par le Théorème 2.2, les faisceaux  $R^j f_*(i_{\text{ns},*}(\Omega_{X_{\text{ns}} / Y}^\bullet))$  sont tous localement libres. Le théorème de la semi-continuité implique donc que l'on dispose d'un isomorphisme de changement de base naturel

$$R^j f_{C,*}(i_X^*(i_{\text{ns},*}(\Omega_{X_{\text{ns}} / Y}^\bullet))) \simeq i^* H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log).$$

Nous omettons la preuve laborieuse du fait que ce morphisme de changement de base est compatible aux connexions de Gauss-Manin. Ceci peut être déduit de la

description algébrique de la connexion de Gauss-Manin donnée dans Katz-Oda (voir [31]).  $\square$

**Proposition 6.5.** *La connexion  $\nabla_{\text{GM}}^{j,\text{an}}$  est à résidus nilpotents le long de  $E(\mathbb{C})$  pour l'extension  $H_{\text{dR}}^j(X/Y)(\log)^{\text{an}}$ . La représentation linéaire complexe du groupe fondamental  $\pi_1(Y(\mathbb{C}) \setminus E(\mathbb{C}))$  associée à  $(H^j(X/Y)(\log)^{\text{an}}|_{Y \setminus E}, \nabla_{\text{GM}}^{j,\text{an}})$  est localement unipotente.*

**Preuve.** La première assertion est une conséquence des Lemme 6.4, Lemme 6.2 et Théorème 6.3. La deuxième assertion est une conséquence du Lemme 6.4 et du théorème de la monodromie locale (cf. par exemple [27]).  $\square$

Le lemme suivant a été suggéré par le rapporteur de l'article.

**Lemme 6.6.** *Soit  $W$  une variété algébrique complexe lisse et  $W_0 \subseteq W$  un ouvert (de Zariski) de  $W$ . Soit  $E_1$  et  $E_2$  des faisceaux cohérents localement libres sur  $W$ . Soit  $\phi : E_1(\mathbb{C}) \rightarrow E_2(\mathbb{C})$  un isomorphisme holomorphe tel que  $\phi|_{W_0(\mathbb{C})}$  provient d'un isomorphisme (algébrique)  $E_1|_{W_0} \rightarrow E_2|_{W_0}$ . Alors  $\phi$  provient d'un unique isomorphisme  $E_1 \rightarrow E_2$ .*

**Preuve.** Au vu de la propriété d'unicité apparaissant dans la conclusion du lemme, on peut supposer sans restreindre la généralité que  $E_1$  et  $E_2$  sont isomorphes à  $\mathcal{O}_W^r$  pour un certain  $r \in \mathbb{N}$ . Dans cette situation, la conclusion du lemme est une conséquence de l'assertion suivante : une fonction analytique  $h$  sur  $W(\mathbb{C})$  qui coïncide sur  $W_0(\mathbb{C})$  avec une fonction rationnelle  $h_0$  est une fonction algébrique. Démontrons cette assertion. Par unicité de la continuation analytique, on peut supposer que  $W \setminus W_0$  est le support du diviseur polaire de  $h_0$ . Soit  $\mathfrak{D} \hookrightarrow W \setminus W_0$  une composante réduite du diviseur polaire de  $h_0$ . Soit  $P \in \mathfrak{D}(\mathbb{C})$  un point qui se trouve dans l'ouvert de lissité de  $\mathfrak{D}$  et qui ne se trouve sur aucune autre composante du diviseur polaire. Il existe alors une suite de points  $P_n \in W(\mathbb{C})$  telle que  $P_n$  ne se trouve pas sur le diviseur polaire et telle que  $h_0(P_n) \rightarrow \infty$ . Comme par ailleurs  $h_0(P_n) \rightarrow h(P)$ , on conclut que  $h_0$  n'a pas de diviseur polaire, ie  $h_0 \in H^0(W, \mathcal{O}_W)$ , ce qui démontre l'assertion et le lemme.  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure la preuve de (j), toujours selon un argument que nous a transmis le rapporteur de l'article.

Par le théorème de Lefschetz difficile en famille (voir [10, 2.6.2]) et la dualité de Poincaré-Verdier (voir [30, chap. III, 3.1]), on dispose d'un isomorphisme de

faisceaux analytiques cohérents avec connexion

$$(H^j(X/Y)(\log)^{\text{an}}|_{Y \setminus E}, \nabla_{\text{GM}}^{j,\text{an}}) \simeq (H^j(X/Y)(\log)^{\vee,\text{an}}|_{Y \setminus E}, (\nabla_{\text{GM}}^{j,\text{an}})^\vee). \quad (18)$$

Par la Proposition 6.5 et le Théorème 6.1, le dernier isomorphisme s'étend en un isomorphisme de faisceaux cohérents analytiques

$$H^j(X/Y)(\log)^{\text{an}} \simeq H^j(X/Y)(\log)^{\vee,\text{an}} \quad (19)$$

sur  $Y(\mathbb{C})$ . Par ailleurs, comme la connexion de Gauss-Manin est régulière (voir la démonstration de (f) plus haut), l'isomorphisme (18) provient d'un isomorphisme algébrique

$$(H^j(X/Y)(\log)|_{Y \setminus E}, \nabla_{\text{GM}}^j) \simeq (H^j(X/Y)(\log)^\vee|_{Y \setminus E}, (\nabla_{\text{GM}}^j)^\vee).$$

Une application du Lemme 6.6 permet maintenant de conclure que l'isomorphisme (19) provient d'un isomorphisme de faisceaux algébriques

$$H^j(X/Y)(\log) \simeq H^j(X/Y)(\log)^\vee$$

ce qui implique le résultat voulu.

## Références

- [1] J. F. Adams, *On the groups  $J(X)$ . II*, *Topology* **3** (1965), 137–171.
- [2] M. F. Atiyah and D. O. Tall, *Group representations,  $\lambda$ -rings and the  $J$ -homomorphism*, *Topology* **8** (1969), 253–297.
- [3] Constantin Bănică and Octavian Stănășilă, *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*, Editura Academiei, Bucharest, 1976. Translated from the Romanian.
- [4] Paul Baum, William Fulton, and George Quart, *Lefschetz-Riemann-Roch for singular varieties*, *Acta Math.* **143** (1979), no. 3-4, 193–211.
- [5] J. M. Bismut, *Eta invariants, differential characters and flat vector bundles*, *Chinese Ann. Math. Ser. B* **26** (2005), no. 1, 15–44. With an appendix by K. Corlette and H. Esnault.
- [6] S. Bloch, *Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman*, *Compositio Math.* **39** (1979), no. 1, 107–127.
- [7] Spencer Bloch and Hélène Esnault, *Algebraic Chern-Simons theory*, *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 4, 903–952.
- [8] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc, and Christophe Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, *Duke Math. J.* **50** (1983), no. 3, 763–801 (French).

- [9] Pierre Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (French).
- [10] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 259–278 (French).
- [11] Michel Demazure, *Cours d’algèbre*, Nouvelle Bibliothèque Mathématique [New Mathematics Library], 1, Cassini, Paris, 1997 (French, with French summary). Primalité. Divisibilité. Codes. [Primality. Divisibility. Codes].
- [12] Torsten Ekedahl and Gerard van der Geer, *The order of the top Chern class of the Hodge bundle on the moduli space of abelian varieties*, Acta Math. **192** (2004), no. 1, 95–109.
- [13] Hélène Esnault and Eckhart Viehweg, *Chern classes of Gauss-Manin bundles of weight 1 vanish*, K-Theory **26** (2002), no. 3, 287–305.
- [14] Leonard Evens and Daniel S. Kahn, *Chern classes of certain representations of symmetric groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **245** (1978), 309–330.
- [15] William Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [16] William Fulton and Robert MacPherson, *Characteristic classes of direct image bundles for covering maps*, Ann. of Math. (2) **125** (1987), no. 1, 1–92.
- [17] Phillip A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **38** (1970), 125–180.
- [18] A. Grothendieck, *Technique de descente et Théorèmes d’existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard : théorèmes d’existence*. Séminaire Bourbaki, 7 (1961-1962), Exposé No. 232.
- [19] ———, *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 215–305 (French).
- [20] ———, *Éléments de géométrie algébrique*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960-1967).
- [21] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6) ; Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre ; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225.
- [22] *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (French).
- [23] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$  ; Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.

- [24] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin, 1973 (French). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4); Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [25] *Cohomologie  $l$ -adique et fonctions  $L$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977 (French). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5); Edité par Luc Illusie.
- [26] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [27] Luc Illusie, *Autour du théorème de monodromie locale*, Astérisque **223** (1994), 9–57 (French). Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [28] ———, *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients*, Duke Math. J. **60** (1990), no. 1, 139–185 (French).
- [29] Uwe Jannsen, *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 245–302.
- [30] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994. With a chapter in French by Christian Houzel; Corrected reprint of the 1990 original.
- [31] Nicholas M. Katz and Tadao Oda, *On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 199–213.
- [32] Bernhard Köck, *The Grothendieck-Riemann-Roch theorem for group scheme actions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 3, 415–458 (English, with English and French summaries).
- [33] Florence Lecomte, *Rigidité des groupes de Chow*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 405–426 (French).
- [34] Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern ; Oxford Science Publications.
- [35] Vincent Maillot and Damien Roessler, *Conjectures sur les d riv es logarithmiques des fonctions  $L$  d’Artin aux entiers n gatifs*, Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 5-6, 715–724 (French, with English and French summaries).
- [36] Vincent Maillot and Damian Roessler, *On the order of certain characteristic classes of the Hodge bundle of semi-abelian schemes*, Number fields and function fields—two parallel worlds, Progr. Math., vol. 239, Birkh user Boston, Boston, MA, 2005, pp. 287–310.
- [37] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [38] Georgios Pappas, *Integral Grothendieck-Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **170** (2007), no. 3, 455–481.

- [39] Richard Pink, *On the order of the reduction of a point on an abelian variety*, Math. Ann. **330** (2004), no. 2, 275–291.
- [40] Daniel Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [41] Alexander Reznikov, *All regulators of flat bundles are torsion*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 2, 373–386.
- [42] A. A. Rojtman, *The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 553–569.
- [43] Damian Roessler, *An Adams-Riemann-Roch theorem in Arakelov geometry*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 1, 61–126.
- [44] Chad Schoen, *Specialization of the torsion subgroup of the Chow group*, Math. Z. **252** (2006), no. 1, 11–17.
- [45] Jean-Pierre Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 37–52 (French).
- [46] Joseph Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. **31** (1975/76), no. 3, 229–257.
- [47] Gerard van der Geer, *Cycles on the moduli space of abelian varieties*, Moduli of curves and abelian varieties, Aspects Math., E33, Vieweg, Braunschweig, 1999, pp. 65–89.