Un théorème d'Adams-Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov

Damien Roessler

Résumé

On démontre un théorème de Riemann-Roch pour les opérations d'Adams agissant sur la K-théorie des fibrés hermitiens.

Abstract

We prove a Riemann-Roch theorem for the Adams operations acting on the K-theory of hermitian bundles.

1 Préliminaires

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et de fibre générique lisse. On note $X(\mathbb{C})$ la variété analytique des points complexes de X. La conjugaison complexe induit un automorphisme antiholomorphe F_∞ de $X(\mathbb{C})$. On définit $A^{p,p}(X)$ comme l'ensemble des formes différentielles réelles ω de type (p,p) sur $X(\mathbb{C})$ satisfaisant à l'équation $F_\infty^*\omega = (-1)^p\omega$. On pose également $\widetilde{A}(X) = \bigoplus_{p\geq 0}(A^{p,p}(X)/(Im\partial + Im\overline{\partial}))$. On appelle **fibré hermitien** $\overline{E} = (E,h)$ la donnée d'un fibré vectoriel algébrique E sur X et d'une métrique hermitienne h, invariante par F_∞, sur le fibré holomorphe $E_\mathbb{C}$ sur $X(\mathbb{C})$ associé à E. Soit ρ une série formelle symétrique en r variables. Notons ρ' la série formelle en les fonctions symétriques élémentaires σ_i $(i \geq 1)$ telle que $\rho'(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \rho$. Si $\overline{E}$ est de rang r, on note $\rho(\overline{E})$ le représentant de $\rho'(c_1(E), c_2(E), \dots)$ associé par les formules de Chern-Weil à la connexion holomorphe hermitienne définie par h (par ex., $Todd(\overline{E})$, où $Todd$ est la série du genre de Todd, $ch(\overline{E})$, où ch est la série du caractère de Chern). Si $\mathcal{E} : 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés algébriques sur X et $\overline{\mathcal{E}}$ la donnée de $\mathcal{E}$ et de métriques hermitiennes sur $E'_\mathbb{C}$, $E_\mathbb{C}$ et $E''_\mathbb{C}$ (invariantes par F_∞), on dispose de trois fibrés hermitiens $\overline{E}'$, $\overline{E}$ et $\overline{E}''$ et d'une classe caractéristique secondaire de Bott et Chern $\widetilde{\rho}(\overline{\mathcal{E}}) \in \widetilde{A}(X)$; pour la définition, nous référons à [5, (f)].

Le **groupe de Grothendieck arithmétique** $\widehat{K}_0(X)$ associé à X est le groupe

engendré par $\widetilde{A}(X)$ et par les classes d'isométrie de fibrés hermitiens sur X, soumis aux relations suivantes:
(a) Pour toute suite exacte $\overline{\mathcal{E}}$ comme ci-dessus, on a $\widetilde{ch}(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{E}' - \overline{E} + \overline{E}''$;
(b) Si $\omega \in \widetilde{A}(X)$ est la somme de deux éléments ω' et ω'', alors $\omega = \omega' + \omega''$ dans $\widehat{K}_0(X)$.
Il existe un produit sur $\widehat{K}_0(X)$, défini par la formule $(\overline{E}+\omega)(\overline{E}'+\omega') = (\overline{E}\otimes\overline{E}' + ch(\overline{E})\wedge\omega' + ch(\overline{E}')\wedge\omega + \frac{1}{2\pi i}\overline{\partial}\partial\omega\wedge\omega')$. On sait ([4, p.234]) que ce produit donne lieu à une structure d'anneau commutatif sur $\widehat{K}_0(X)$. On définit une application ch de $\widehat{K}_0(X)$ vers les formes, par la formule $ch(\overline{E}+\omega) = \frac{1}{2\pi i}\overline{\partial}\partial\omega + ch(\overline{E})$, qui est bien définie par les propriétés des classes secondaires.
D'après [4, Th. 7.3.4, p. 235] les puissances extérieures des fibrés hermitiens donnent lieu à une pré-λ-structure sur $\widehat{K}_0(X)$ (pour la déf., cf. [1, Exp. V]) et on montre dans [10] que cette structure est spéciale. Rappelons que sur tout λ-anneau spécial, on dispose d'opérations d'Adams ψ^k ($k \geq 0$), qui sont des endomorphismes d'anneau.
Soit maintenant Y et B des schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{Z}$ et de fibres génériques lisses. On se donne un morphisme $g : Y \to B$ projectif, plat, lisse sur les fibres génériques et une métrique Kaehlerienne h_Y (invariante par F_∞) sur les points complexes de Y. Soit ω un élément de $\widetilde{A}(Y)$ et (E, h) un fibré hermitien sur Y, où E est acyclique relativement à g. Le faisceau de modules f_*E, image directe de E, est alors un fibré et on écrit g_*h pour la métrique qu'il hérite de E par intégration sur les fibres (cf. [8, 9.2, p. 278]). On note $T(h_Y, h) \in \widetilde{A}(B)$ la torsion analytique supérieure de (E, h) relativement à g et à la métrique de Y; pour la définition, cf. [7, Def. 3.8., p. 668]. Notons $\overline{Tg_{\mathbb{C}}}$ le fibré tangent relatif associé à $g_{\mathbb{C}}$, muni de la métrique induite. On démontre au moyen des propriétés de la torsion analytique (cf. [2, Th. I, p. 972]) qu' il existe un unique morphisme de groupes $g_* : \widehat{K}_0(Y) \to \widehat{K}_0(B)$, tel que $g_*((E, h) + \eta) = (g_*E, g_*h) - T(h_Y, h) + \int_{Y(\mathbb{C})/B(\mathbb{C})} Todd(\overline{Tg_{\mathbb{C}}})\omega$ pour tous les (E, h) et ω comme ci-dessus.

2 Le cas des immersions fermées

Soient X et Y des schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{Z}$, de fibres génériques lisses, et $i : Y \to X$ une immersion fermée régulière. On suppose qu'il existe un schéma B avec les mêmes propriétés et des morphismes $g : Y \to B$ et $f : X \to B$ projectifs et plats, lisses sur la fibre générique, et tels que $g = f \circ i$. On suppose aussi que Y et X sont munis de métriques Kaehleriennes (invariantes par F_∞) et que le morphisme induit par i sur les fibrés tangents préserve les métriques. On note $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(g/f)$ la suite exacte

$$0 \to Tg_{\mathbb{C}} \to i^*Tf_{\mathbb{C}} \to N_{X(\mathbb{C})/Y(\mathbb{C})} \to 0$$

où $Tg_{\mathbb{C}}$ et $Tf_{\mathbb{C}}$ sont les fibrés tangents relatifs munis des métriques induites et où$N_{X(\mathbb{C})/Y(\mathbb{C})}$ est le fibré normal de $Y(\mathbb{C})$ dans $X(\mathbb{C})$, muni de la métrique quotient.
Pour étudier i, on se donne un fibré η sur Y et une résolution

$$0 \to \xi_m \to \xi_{m-1} \to \ldots \to \xi_0 \to i_*\eta \to 0$$

par des fibrés ξ_i sur X. Soit h^{ξ_i} et h^η des métriques sur les fibrés ξ_i et η, invariantes par conjugaison sur les points complexes et satisfaisant la condition (A) de Bismut (cf. [6, p. 258]). On peut associer à cette résolution son **courant de Bott-Chern singulier**, noté $T(h^\xi)$, qui est une somme de courants de type (p,p); pour la définition, cf. [6]. Pour formuler un théorème de Riemann-Roch pour i, nous aurons besoin du genre R de Gillet-Soulé, qui est l'unique classe caractéristique additive définie pour un fibré en droites L par la formule

$$R(L) = \sum_{m\ impair, \geq 1} (2\zeta'(-m) + \zeta(-m)(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}))c_1(L)^m/m!$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann. Rappelons aussi que θ est l'unique classe multiplicative sur les λ-anneaux donnée par la formule $\theta^k(l) := 1 + l + l^2 + \ldots l^{k-1}$ pour un élément l de λ-dimension 1. Pour chaque λ-anneau, l'ensemble de définition de θ^k est l'ensemble des éléments de λ-dimension finie. Par ailleurs, si $\gamma = \sum_{p\geq 0}\gamma_p$ est une somme de courants de type (p,p), on pose $\phi^k(\gamma) := \sum_{p\geq 0} k^p\gamma_p$. L'énoncé suivant est un théorème de Riemann-Roch pour l'immersion i et les opérations d'Adams agissant sur les groupes de Grothendieck arithmétiques.

Théorème I. *Soit $\overline{\alpha}$ un fibré hermitien sur X. Alors l'élément*

$$g_*(\theta^k(\overline{N}^\vee_{X/Y})\psi^k(\overline{\eta})\overline{\alpha}) - \sum_{i=0}^m (-1)^i f_*(\psi^k(\overline{\xi}_i)\overline{\alpha})$$

de $\widehat{K}_0(B)$ est égal pour tout $k \geq 0$ à la classe de l'élément de $\widetilde{A}(B)$

$$\int_{Y(\mathbb{C})/B(\mathbb{C})} Todd(Tg_{\mathbb{C}})ch(\psi^k(\overline{\eta})\theta^k(\overline{N}^\vee_{X/Y}))R(N_{X(\mathbb{C})/Y(\mathbb{C})})ch(\alpha) +$$

$$\int_{X(\mathbb{C})/B(\mathbb{C})} Todd(\overline{Tg_{\mathbb{C}}})k.\phi^k(T(h^\xi))ch(\overline{\alpha}) +$$

$$\int_{Y(\mathbb{C})/B(\mathbb{C})} ch(\psi^k(\overline{\eta})\theta^k(\overline{N}^\vee_{X/Y}))Todd^{-1}(\overline{N}_{X(\mathbb{C})/Y(\mathbb{C})})\widetilde{Todd}(\overline{\mathcal{N}}_{\mathbb{C}}(g/f))ch(\overline{\alpha}).$$

Pour $k = 1$, le théorème est une conséquence immédiate de [2, Th. I, p. 972]. On applique ce résultat pour démontrer le théorème pour tout k, dans le cas où i est l'immersion du modèle standard au sens de [3, p. 282]. On obtient ensuite le cas général par le mécanisme de la déformation au cône normal de [9].

3 Le théorème de Riemann-Roch

On suppose maintenant que Y et B sont des schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{Z}$, de fibres génériques lisses, et que $g : Y \to B$ est un morphisme localement d'intersection complète, projectif, plat, lisse sur la fibre générique. On suppose aussi que Y est muni d'une métrique Kaehlerienne.
Il existe par définition un fibré projectif $p : P \to B$ sur B et une immersion régulière $j : Y \to P$ telle que $g = p \circ j$. On munit le fibré tangent relatif Tp et le fibré normal $N_{P/Y}$ de métriques hermitiennes. On écrit $\widetilde{\theta}^k$ pour la classe secondaire associée à la série

$$k^{dim(B)-dim(P)} \prod_{i=1}^{dim(P)-dim(B)} \frac{e^{X_i}-1}{X_i e^{X_i}} \frac{k.X_i e^{k.X_i}}{e^{k.X_i}-1}.$$

On démontre que l'élément $\theta^k(i^*\overline{Tp}^\vee)$ est inversible dans $\widehat{K}_0(Y)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. L'existence de cet inverse est une conséquence de la nilpotence locale de la γ-filtration (cf. [1, 3.10, p. 331, Exposé V]) naturelle de $\widehat{K}_0(Y)$. On démontre cette nilpotence en étudiant le groupe de Grothendieck arithmétique des Grassmanniennes. On note enfin $\theta^k(\overline{Tg}^\vee)^{-1}$ l'élément $\theta^k(\overline{N}^\vee_{P/Y})\widetilde{\theta}^k(\overline{\mathcal{N}}_{\mathbb{C}}(g/p)))+\theta^k(\overline{N}^\vee_{P/Y})\theta^k(i^*\overline{Tp}^\vee)^{-1}$ de $\widehat{K}_0(Y)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. On démontre que cet élément ne dépend pas du choix de j, ni de p, ni de la métrique de Tp, ni de la métrique de $N_{P/Y}$.

Théorème II. *L'égalité*

$$\psi^k(g_*(y)) =$$
$$g_*(\theta^k(\overline{Tg}^\vee)^{-1}(1+R(Tg_{\mathbb{C}})-k.\phi^k(R(Tg_{\mathbb{C}}))\psi^k(y)))$$

est vérifiée pour tout $k \geq 1$ et tout $y \in \widehat{K}_0(Y)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$.
Pour prouver la formule, on procède en deux étapes. On considère d'abord le cas où $Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$, g est la projection naturelle sur $Spec\mathbb{Z}$ et y est la classe du fibré trivial muni de la métrique triviale. Pour ce faire, on démontre qu'étant donné $k \geq 1$ il existe une unique classe caractéristique additive R' telle que la formule $\psi^k(g_*(y)) = g_*(\theta^k(\overline{Tg}^\vee)^{-1}(1-R'(Tg(\mathbb{C}))\psi^k(y))$ soit vérifiée dans ce cas pour tout r. On combine ensuite le Théorème I appliqué à l'immersion diagonale $\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ (suivant une idée de N. Dan) avec un argument d'induction sur les coefficients de R' pour démontrer que R' s'identifie avec la classe $k.\phi^k(R)-R$ décrite plus haut. Ce faisant, on démontre aussi que la formule et donc le Théorème II est vérifié pour tout les éléments de $\widehat{K}_0(\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}})$, pour tout r. Au moyen d'une formule de changement de base, on démontre le théorème pour la projection $\mathbb{P}^r_B \to B$ de l'espace projectif de dimension r sur B. Enfin, on factorise g en une immersion régulière dans un espace projectif sur B, suivie de la projection sur B et on utilise le Théorème I pour conclure.

References

[1] L. Illusie A. Grothendieck, P. Berthelot. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch.* Springer Lecture Notes 225, 1971.

[2] J.-M. Bismut. Familles d'immersions et formes de torsion analytique en degré supérieur. *C.R.A.S.*, 320:969–974, 1995.

[3] W. Fulton. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, 1984.

[4] C. Soulé H. Gillet. Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics i, ii. *Annals of Mathematics*, 131:163–203, 205–238, 1990.

[5] C. Soulé J.-M. Bismut, H. Gillet. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles i, ii, iii. *Comm. Math. Physics*, 115:49–78, 79–126, 301–351, 1988.

[6] H. Gillet J.-M. Bismut and C. Soulé. Bott-chern currents and complex immersions. *Duke Mathematical Journal*, 60:255–284, 1990.

[7] K. Koehler J.-M. Bismut. Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas. *Journal for algebraic geometry*, 1:947–684, 1992.

[8] M. Vergne N. Berline, E. Getzler. *Heat kernels and Dirac operators.* Springer-Verlag, 1992.

[9] R. MacPherson P. Baum, W. Fulton. Riemann-roch for singular varieties. *Publications mathématiques de l'IHES*, 45, 1975.

[10] D. Roessler. Lambda structure en K-théorie des fibrés algébriques hermitiens, à paraître. *C.R.A.S.*, 1996.