FORMES AUTOMORPHES ET THÉORÈMES DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUES

par

Vincent Maillot & Damian Rössler

À Jean-Michel Bismut, avec admiration

Résumé. — Nous construisons trois familles de formes automorphes au moyen du théorème de Riemann-Roch arithmétique et de la formule de Lefschetz arithmétique. Deux de ces familles ont déjà été construites par Yoshikawa et notre construction met en lumière leur origine arithmétique.

***Abstract* (Automorphic forms and arithmetic Riemann-Roch theorems)**
We construct three families of automorphic forms using the arithmetic Riemann-Roch theorem and the arithmetic Lefschetz formula. Two of these families have already been constructed by Yoshikawa and our construction displays their arithmetic origin.

1. Introduction

Le but de ce texte est de donner une interprétation arithmétique et géométrique à trois familles de formes automorphes d'expression analytique. Plus précisément, on démontre que ces formes automorphes sont algébriques et entières, lorsque les espaces sous-jacents ont des modèles entiers.

La première est la famille de formes modulaires de Siegel construite par Yoshikawa dans [26] (voir aussi [14] pour une autre construction). Notre calcul démontre une version légèrement affaiblie d'une conjecture de Yoshikawa sur les coefficients de Fourier de ces formes modulaires.

La deuxième est la famille de formes modulaires d'Igusa « produit des thêta constantes paires », souvent notées χ_g. Les formes modulaires χ_g dégénèrent au voisinage des variétés abéliennes munies d'un diviseur thêta singulier et notre

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F55, 14G40.
Mots clefs. — Formes automorphes, théorème de Riemann-Roch arithmétique.

calcul fournit une expression géométrique pour cette dégénérescence, dans le cas où le diviseur thêta singulier est défini sur un corps fini.

La troisième est la famille de formes automorphes à coefficients sur certains espaces de modules de surfaces K3 ; lorsque l'involution est sans point fixe, elles coïncident avec certaines fonctions Φ de Borcherds (cf. [27, Sec. 8]). Cette famille de formes est construite par Yoshikawa dans [27, Th. 5.2]. Notre calcul démontre en particulier que les fonctions Φ ci-dessus sont d'origine arithmétique.

Dans l'appendice, nous formulons une extension conjecturale de la formule de Lefschetz arithmétique, où des irrégularités sont autorisées sur les fibres finies. Cette formule n'est pas appliquée dans le présent texte mais elle représente un moyen théorique d'étudier la dégénérescence de la deuxième forme modulaire de Yoshikawa lorsqu'on considère une surface K3 avec involution définie sur un corps de nombres et ayant mauvaise réduction en certaines places finies.

Dans ce texte, nous utiliserons librement la terminologie et les résultats énoncés dans la section 4 de [13] (article dans lequel la formule de Lefschetz arithmétique mentionnée plus haut est démontrée). Par ailleurs, nous utiliserons la terminologie et les résultats de [7] (article dans lequel le théorème de Riemann-Roch arithmétique en degré 1 est démontré).

L'objet du présent texte est de présenter des calculs. Pour une introduction au théorème de Riemann-Roch arithmétique et à la formule de Lefschetz arithmétique, nous suggérons de consulter les articles originaux cités dans le dernier paragraphe, ainsi que [10] ou encore les notes [21].

Les résultats de la partie 4 ont fait l'objet d'une communication par les auteurs lors de la conférence « Arithmetic Algebraic Geometry » organisée au R.I.M.S. (Université de Kyoto, Japon) en septembre 2006.

Remerciements. Une partie de ce travail a été réalisée alors que le premier auteur était professeur invité au R.I.M.S. ; il lui est très agréable de remercier cette institution pour son hospitalité et les conditions de travail exceptionnelles dont il a pu bénéficier. Nos remerciements vont également à K.-I. Yoshikawa, pour toutes les explications qu'il nous a fournies sur ses travaux, ainsi qu'au rapporteur pour sa lecture très attentive du manuscrit. Enfin, les auteurs sont reconnaissants à S. Tang de leur avoir signalé une erreur dans la formulation initiale de la Conjecture 5.1.

2. Les formes modulaires de Yoshikawa de premier type

Soit S le spectre d'un anneau arithmétique. Soit B une variété arithmétique sur S. Dans ce texte, on appellera *variété arithmétique* sur S un schéma intègre et régulier, qui est quasi-projectif sur S. Soit $\pi : \mathcal{A} \to B$ un schéma abélien de dimension relative g. Soit $h : \Theta \to B$ un morphisme lisse et propre de dimension relative $g-1$ et $\theta : \Theta \hookrightarrow \mathcal{A}$ une B-immersion fermée. On suppose que $\mathcal{O}(\Theta)$ est un fibré relativement ample et que le degré de $\mathcal{O}(\Theta)$ est $g!$ sur chaque fibre géométrique de $\mathcal{A}/B$. Une hypothèse équivalente est que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}(\Theta)$ vaut 1 sur chaque fibre géométrique de $\mathcal{A}/B$.

Nous noterons $T\Theta := \Omega^\vee_{\Theta/B}$ et $\mathrm{T}\mathcal{A} := \Omega^\vee_{\mathcal{A}/B}$. Nous écrirons $u : B \to \mathcal{A}$ pour la section unité et $\mathrm{T}\mathcal{A}_0$ pour $u^*\mathrm{T}\mathcal{A}$. Nous écrirons aussi $\omega := u^*\det(\Omega_{\mathcal{A}/B})$. On note $\overline{\mathcal{O}}(\Theta)$ le fibré $\mathcal{O}(\Theta)$ muni de sa métrique de Moret-Bailly (voir [16, Par. 3.2]) et on pose $\overline{L} := \overline{\mathcal{O}}(\Theta) \otimes \pi^* u^* \overline{\mathcal{O}}(\Theta)^\vee$. La forme $2\pi \cdot \mathrm{c}_1(\overline{L})$ définit une structure de fibration Kählerienne sur $\mathcal{A}$ au sens de [3, Par. 1]. Soit N le fibré conormal de l'immersion θ.

Le *morphisme de Gauss* est défini de la manière suivante. Le morphisme naturel $\mathrm{T}\Theta \hookrightarrow \theta^*\mathrm{T}\mathcal{A}$ induit un morphisme $\Theta \to \mathrm{Gr}(g-1, \theta^*\mathrm{T}\mathcal{A})$. Utilisant les isomorphismes naturels $\mathrm{Gr}(g-1,\theta^*\mathrm{T}\mathcal{A}) \simeq \theta^*\,\mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A})$, $\mathrm{Gr}(g-1,\pi^*\mathrm{T}\mathcal{A}_0) \simeq \pi^*\,\mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0)$ et $\mathrm{T}\mathcal{A} \simeq \pi^*\mathrm{T}\mathcal{A}_0$, on obtient un morphisme naturel $\Theta \to h^*\,\mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0)$. Si l'on compose ce dernier avec la projection naturelle de $h^*\,\mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0) = \mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0) \times_B \Theta$ sur le premier facteur, on obtient le morphisme de Gauss $\gamma : \Theta \to \mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0)$. On note $p : P := \mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0) \to B$ l'application structurale. Pour la définition de $\mathrm{Gr}(\cdot,\cdot)$ voir [6, App. B.5.7]. On notera

$$\mathcal{E} : 0 \to E \to p^*T\mathcal{A}_0 \to Q \to 0$$

la suite exacte universelle sur P. Si l'on munit $p^*T\mathcal{A}_0$ de la métrique image réciproque de celle de $T\mathcal{A}_0$ et les fibrés E et Q des métriques induites, on obtient à partir de $\mathcal{E}$ une suite exacte métrisée que nous noterons $\overline{\mathcal{E}}$.

Lemme 2.1. — *Le morphisme de Gauss est génériquement fini de degré $g!$.*

Preuve. Le fait que le morphisme de Gauss est génériquement fini (ou autrement dit, qu'il induit une extension finie de corps de fonctions $\kappa(\Theta)|\kappa(\mathrm{Gr}(g-1,\mathrm{T}\mathcal{A}_0))$ est démontré dans [1, Th. 4]. Pour calculer son degré, nous considérons le calcul suivant dans la théorie de Chow de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} g! &\overset{(1)}{=} \pi_*(\mathrm{c}_1(\mathcal{O}(\Theta))^g) = \pi_*(\theta_*(1)\,\mathrm{c}_1(\mathcal{O}(\Theta))^{g-1}) \overset{(2)}{=} h_*(\mathrm{c}_1(\theta^*(\mathcal{O}(\Theta)))^{g-1}) \\ &\overset{(3)}{=} h_*(\mathrm{c}_1(N^\vee)^{g-1}) \overset{(4)}{=} p_*\gamma_*(\gamma^*(\mathrm{c}_1(Q)^{g-1})) = \deg(\gamma) p_*(\mathrm{c}_1(Q)^{g-1}) \\ &\overset{(5)}{=} \deg(\gamma). \end{aligned}$$

L'égalité (1) est justifiée par le théorème de Riemann-Roch (appliqué au morphisme π et au fibré $\mathcal{O}(\Theta)$), l'égalité (2) est justifiée par la formule de projection, l'égalité (3) est justifiée par la formule d'adjonction, l'égalité (4) est une conséquence la définition de P et pour finir (5) est une conséquence du fait que le degré de $\mathcal{O}(1)$ sur un espace projectif au-dessus d'un corps vaut 1. **Q.E.D.**

Nous appliquons maintenant le théorème de Riemann-Roch arithmétique à Θ.

Lemme 2.2. — *Les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{c}}_1(R^\bullet h_*(\overline{\mathcal{O}}_\Theta)) &= (-1)^g\,\widehat{\mathrm{c}}_1(R^0\pi_*(\overline{\Omega}^g_{\mathcal{A}})) + \log(\frac{g!!}{(g-1)!!}) \\ &= (-1)^{g+1}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}}_0) + \log(\frac{g!!}{(g-1)!!})\end{aligned}$$

sont vérifiées.

On rappelle que par définition de la double factorielle :

$$\frac{g!!}{(g-1)!!} = \frac{g(g-2)\cdots(1+(1+(-1)^g)/2)}{(g-1)(g-3)\cdots(1+(1-(-1)^g)/2)}\ .$$

Preuve. Soit M une variété Kählerienne de dimension g et de forme de Kähler $\underline{\omega}$. Soit $k \geqslant 0$ et soit $\nu \in \mathrm{H}^k(M, \mathcal{O}_M)$. On dispose de la formule suivante :

$$|\nu|^2_{L_2} := \frac{i^k(-1)^{k(k+1)/2}}{(2\pi)^g(g-k)!}\int_M \nu\wedge\overline{\nu}\wedge\underline{\omega}^{g-k}. \tag{1}$$

Voir [15, Par. 2.3]. Par ailleurs, considérons la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned}0 &\rightarrow R^0\pi_*\mathcal{O}\rightarrow R^0h_*\mathcal{O}_\Theta\rightarrow 0\\ &\rightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}\rightarrow R^1h_*\mathcal{O}_\Theta\rightarrow 0\\ &\rightarrow \cdots\rightarrow\\ 0 &\rightarrow R^{g-1}\pi_*\mathcal{O}\rightarrow R^{g-1}h_*\mathcal{O}_\Theta\rightarrow R^g\pi_*\mathcal{O}(-\Theta)\xrightarrow{\star} R^g\pi_*\mathcal{O}\rightarrow 0\end{aligned}$$

née de la suite exacte

$$0\rightarrow\mathcal{O}(-\Theta)\rightarrow\mathcal{O}\rightarrow\mathcal{O}_\Theta\rightarrow 0.$$

On remarque aussi que la flèche $\star$ est un isomorphisme car $R^g\pi_*\mathcal{O}$ est localement libre de rang 1. Toutes les flèches reliant deux objets non-nuls dans la suite exacte longue sont donc des isomorphismes. En particulier les faisceaux de cohomologie $R^kh_*\mathcal{O}_\Theta$ sont localement libres. De plus, en comparant la formule (1) sur les fibres de $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ et sur les fibres de $\Theta(\mathbb{C})$, on conclut que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant g-1$, on a

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(R^k\pi_*(\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}})) = \widehat{\mathrm{c}}_1(R^kh_*(\overline{\mathcal{O}}_\Theta)) - \log(g-k). \tag{2}$$

On utilisé ici le fait que la forme de Kähler sur les fibres est donnée par $2\pi\cdot\mathrm{c}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta))$. Si l'on combine cette dernière égalité avec l'égalité

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(R^\bullet\pi_*(\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}})) = 0 \tag{3}$$

on obtient la première égalité du lemme. L'égalité (3) est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à π et $\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}}$ et de l'annulation de la torsion analytique du fibré trivial d'une variété abélienne de dimension $\geqslant 2$ (cf. [20, Par. 5, p. 173]). La deuxième égalité du lemme est une conséquence de la formule de projection. **Q.E.D.**

Le théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à h et au fibré hermitien trivial sur Θ donne l'égalité suivante dans $\widehat{\mathrm{CH}}^{\leqslant 1}(B)_{\mathbb{Q}}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ch}}(R^{\bullet}h_*\overline{\mathcal{O}}_{\Theta}) - T(\Theta, \overline{\mathcal{O}}_{\Theta}) &= h_*(\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{\mathrm{T}h})) - \int_{\Theta/B} R(\mathrm{T}h)\,\mathrm{Td}(\mathrm{T}h)\\ &= g!\ p_*(\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{E})) - g!\ \int_{P/B} R(E)\,\mathrm{Td}(E)\\ &= g!\int_{P/B} \mathrm{Td}^{-1}(\overline{Q})\,\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}}) + g!\ p_*(\widehat{\mathrm{Td}}^{-1}(\overline{Q})\,\widehat{\mathrm{Td}}(p^*\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}))\\ &\quad - g!\int_{P/B} R(E)\,\mathrm{Td}(E).\end{aligned}$$

Remarquons à présent que pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\widehat{\mathrm{Td}}^{-1}(\overline{Q})^{[k]} = -\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{Q})^k$$

(on rappelle que par définition $\mathrm{Td}^{-1}(x) = (1-\exp(-x))/x$). Par ailleurs, selon [17, Par. 8.2]

$$p_*(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{Q})^g)) = [\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l] + \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0});$$

ici $\mathcal{H}_l := \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}$ est le l-ème nombre harmonique. On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned}&g!\ p_*(\ \widehat{\mathrm{Td}}^{-1}(\overline{Q})\,\widehat{\mathrm{Td}}(p^*\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}))^{[\leqslant 1]}\\ &\quad = -g!\ (1+\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}))\cdot\Big(\frac{(-1)^g}{g!}\deg(Q) + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!}(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}) + [\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l])\Big)\\ &\quad = -g!\ (1+\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}))\cdot\Big(\frac{(-1)^g}{g!} + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!}(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}) + [\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l])\Big)\\ &\quad = -(1+\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}))\cdot\Big((-1)^g + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)}(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}) + [\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l])\Big)\end{aligned}$$

Si l'on combine ce dernier calcul avec le Lemme 2.2, il vient

$$\begin{aligned} T(\Theta,\overline{\mathcal{O}}_\Theta) &= -g!\int_{P/B}\mathrm{Td}^{-1}(\overline{Q})\,\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}}) \\ &- (-1)^g\left(\frac{g+3}{2g+2}\right)\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0})-\frac{(-1)^g}{(g+1)}\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l \\ &+ g!\int_{P/B}R(E)\,\mathrm{Td}(E)+\log(\frac{g!!}{(g-1)!!}). \end{aligned}$$

Enfin, on a le

Lemme 2.3. — *L'égalité*

$$\int_{P/B}\mathrm{Td}^{-1}(\overline{Q})\,\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}})=(-1)^g\sum_{p=0}^{[\frac{g}{2}-1]}\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1-2p)}{(2p+1)!\,(g-2p-1)!}\mathcal{H}_{2p+1}$$

est vérifiée.

Ici $\zeta_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ désigne la fonction zêta de Riemann.

Preuve. Il suffit de démontrer l'égalité dans le cas où $S=\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ et B est un point. Nous le supposerons donc pendant la preuve du lemme.

À toute série formelle symétrique ϕ on peut associer une classe caractéristique encore notée ϕ et une classe secondaire de Bott-Chern $\tilde{\phi}$ comme dans [8, §1].

D'après le théorème fondamental des fonctions symétriques, pour tout fibré vectoriel F la classe $\phi(F)$ s'exprime comme combinaison linéaire finie des classes de Chern de F :

$$\phi(F)=\sum\phi_{i_1,\dots,i_k}c_{i_1}(F)\cdots c_{i_k}(F).$$

Soit $\overline{\mathcal{F}}$ une suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens sur une variété complexe X :

$$\overline{\mathcal{F}}:0\to\overline{F}'\to\overline{F}\to\overline{F}''\to 0$$

telle que les métriques sur F' et F'' sont induites par celle sur F et telle que le fibré hermitien $\overline{F}$ est plat, ou même simplement projectivement plat (voir [23, §6 et Theorem 4] pour la définition de cette notion et ses conséquences). On déduit de cette dernière hypothèse que $c(\overline{F}'\oplus\overline{F}'')=c(\overline{F})$ en tant que formes, ce qui en appliquant [8, Proposition 1.3.1] à chacun des termes monomiaux de :

$$\tilde{\phi}(\overline{\mathcal{F}})=\sum\phi_{i_1,\dots,i_k}\widetilde{c_{i_1}\cdots c_{i_k}}(\overline{\mathcal{F}}),$$

montre dans $\widetilde{A}(X):=A(X)/(\operatorname{Im}\partial+\operatorname{Im}\overline{\partial})$ l'égalité :

$$\tilde{\phi}(\overline{\mathcal{F}})=\sum\phi_{i_1,\dots,i_k}\sum_{q=1}^{k}c_{i_1}(\overline{F})\cdots c_{i_{q-1}}(\overline{F})\cdot\tilde{c}_q(\overline{\mathcal{F}})\cdot c_{i_{q+1}}(\overline{F})\cdots c_{i_k}(\overline{F}).$$

Appliquons ce qui précède pour la classe de Todd et la suite exacte universelle $\overline{\mathcal{E}}$. Il vient, en remarquant de plus que $c\,(p^*\overline{\mathrm{T}\mathcal{A}_0}) = 1$, l'égalité :

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}}) = \sum_{k=1}^{g} \mathrm{Td}_k\, \tilde{c}_k(\overline{\mathcal{E}}).$$

On sait par ailleurs [12, p.14 Remark 2] que $\mathrm{Td}_k = \mathrm{Td}_{1,\dots,1}$ (k fois). On peut donc écrire :

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2}\,\tilde{c}_1(\overline{\mathcal{E}}) + \sum_{k=2}^{g} \frac{B_k}{k!}\,\tilde{c}_k(\overline{\mathcal{E}}),$$

où $B_k = -k\,\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)$ pour $k \geqslant 2$ est le k-ième nombre de Bernoulli.

On tire de [9, Proposition 5.3] que $\tilde{c}_1(\overline{\mathcal{E}}) = 0$ et que pour $2 \leqslant k \leqslant g$ on a :

$$\tilde{c}_k(\overline{\mathcal{E}}) = (-1)^{k-1}\mathcal{H}_{k-1}\, c_1^{k-1}(\overline{Q}),$$

où $\mathcal{H}_{k-1}$ est le $(k-1)$-ième nombre harmonique.

Mettant ce qui précède bout-à-bout en tenant compte de la nullité des nombres B_{2p+1} pour $p > 0$, on peut finalement écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})} \mathrm{Td}^{-1}(\overline{Q})\,\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})} \left(\sum_{q \geqslant 0} \frac{\left(-c_1(\overline{Q})\right)^q}{(q+1)!} \right) \sum_{p=0}^{[\frac{g}{2}-1]} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1-2p)}{(2p+1)!} \mathcal{H}_{2p+1}\, c_1^{2p+1}(\overline{Q}) \\
&\quad = (-1)^g \sum_{p=0}^{[\frac{g}{2}-1]} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(-1-2p)}{(2p+1)!\,(g-2p-1)!} \mathcal{H}_{2p+1}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Enfin, en utilisant la suite exacte universelle $\mathcal{E}$, on calcule que

$$\begin{aligned}
&\int_{P/B} R(E)\,\mathrm{Td}(E) = -\int_{P/B} R(Q)\,\mathrm{Td}^{-1}(Q) \\
&= \int_{P/B} \Big(\big(\sum_{l \geqslant 0} (-1)^{l+1} \frac{x^l}{(l+1)!} \big) \cdot \big(\sum_{m \geqslant 1,\ m \text{ impair}} (2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-m) + \mathcal{H}_m \zeta_{\mathbb{Q}}(-m)) \cdot \frac{x^m}{m!} \big) \Big)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $x = c_1(Q)$. Ainsi

$$\int_{P/B} R(E)\,\mathrm{Td}(E) = -\sum_{k=0}^{[\frac{g}{2}-1]} (-1)^{g-2k} \frac{2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1-2k) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1-2k)\mathcal{H}_{2k+1}}{(2k+1)!(g-2k-1)!}.$$

Le théorème suivant résume maintenant nos calculs :

Théorème 2.4. — *L'égalité*

$$\begin{aligned} T(\Theta,\overline{\mathcal{O}}_\Theta) &= (-1)^g\left(\frac{g+3}{2g+2}\right)\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}) \\ &- (-1)^g\sum_{k=0}^{[\frac{g}{2}-1]}\binom{g}{2k+1}\big(2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1-2k)+2\zeta_{\mathbb{Q}}(-1-2k)\mathcal{H}_{2k+1}\big) \\ &- \frac{(-1)^g}{(g+1)}\sum_{l=1}^{g-1}\mathcal{H}_l + \log\Big(\frac{g!!}{(g-1)!!}\Big) \end{aligned}$$

est vérifiée.

Cette dernière égalité implique notamment qu'il existe un nombre entier $l\in\mathbb{N}^*$, un nombre réel C et une forme modulaire μ pour le groupe d'Igusa $\Gamma(1,2)$, tels que

$$\exp(T(\Theta,\overline{\mathcal{O}}_\Theta))^l = \|C\cdot\mu\|_{\mathrm{Pet}}^{2l(-1)^{g+1}(g+3)/(2g+2)} \tag{4}$$

et que μ est définie sur $\mathbb{Q}$. L'égalité (4) est une forme affaiblie de la première partie de la Conjecture 6.1 de Yoshikawa dans [26]. Une autre conséquence de l'égalité (4) est une forme affaiblie de la première assertion du « Main Theorem » dans l'introduction de [26]. Dans les deux cas, il s'agit d'une forme affaiblie parce que le nombre l n'est pas effectif et que le groupe d'Igusa $\Gamma(1,2)$ est plus petit que le groupe de Siegel.

Remarque. Il est probable que le nombre l peut être déterminé en faisant usage dans les calculs ci-dessus du théorème d'Adams-Riemann-Roch arithmétique démontré dans [22] (qui tient compte des phénomènes de torsion) plutôt que du théorème de Riemann-Roch arithmétique. Nous n'avons cependant pas effectué ce calcul.

3. Les formes modulaires d'Igusa « produit des thêta constantes paires »

Les formes modulaires décrites via la torsion analytique de $\mathcal{O}_\Theta$ dans la dernière section coïncident avec la forme modulaire d'Igusa « produits des fonctions thêta paires » lorsque $g=2,3$ (cf. [26, après le « Main Theorem »]). On peut se demander si ces dernières formes modulaires peuvent aussi être interprétées via le théorème de Riemann-Roch arithmétique. Nous allons montrer dans cette section qu'une pareille interprétation est possible. Le théorème de Riemann-Roch arithmétique est ici appliqué à $\mathcal{O}(\Theta)$; il s'agit alors d'un cas particulier de la « formule clé » de Moret-Bailly.

On continue avec les mêmes hypothèses que dans la section 2. On suppose de plus que Θ est symétrique, i.e. invariant par l'action de l'inversion $[-1]$ du schéma en groupes $\mathcal{A}/B$; on notera $\mathcal{A}_{[-1]}$ (resp. $\Theta_{[-1]}$) le schéma des points fixes de $[-1]$ dans $\mathcal{A}$ (resp. dans Θ). Par ailleurs, on suppose que 2 est inversible sur B.

Le théorème du cube (cf. par ex. [5, 4.1.23]) implique que

$$8 \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_{\mathcal{A}_{[-1]}}) = 8 \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(u^*\overline{\mathcal{O}}(\Theta)).$$

Par ailleurs, la formule clé de Moret-Bailly (cf. [16, Th. 3.3]) affirme que

$$8 \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(u^*\overline{\mathcal{O}}(\Theta)) = 4 \cdot \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}) + 2g\log(4\pi).$$

On en déduit que $8\cdot\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_{\mathcal{A}_{[-1]}}) = 4\cdot\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega})+2g\log(4\pi)$. Comme Θ est lisse sur B, le schéma $\Theta_{[-1]}$ est régulier et donc ouvert dans $\mathcal{A}_{[-1]}$. Soit $g : \mathcal{A}_{[-1]}\backslash\Theta_{[-1]} \to B$ le morphisme de structure. On cherche à calculer

$$g_*(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_{\mathcal{A}_{[-1]}\backslash\Theta_{[-1]}})).$$

Vu que le fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta)$ est canoniquement trivialisé sur $\mathcal{A}_{[-1]}\backslash\Theta_{[-1]}$, on est ramené à un calcul analytique sur une fibre complexe arbitraire de $\mathcal{A} \to B$. Nous en fixons une et la nommons A. Nous rappelons l'expression explicite de la métrique de Moret-Bailly de $\mathcal{O}(\Theta)$ donnée dans [16, Par. 3, (3.2.2)]. Si Ω est une matrice $g \times g$ complexe du demi-plan de Siegel représentant A, on dispose de la formule

$$\|s_\Theta(z)\| = \det(\Im(\Omega))^{1/4}\exp(-\pi{}^t y(\Im(\Omega))^{-1}y)|\theta(z,\Omega)|$$

où $\theta(z,\Omega)$ est la fonction θ de Riemann associée à Ω, $z = x+iy$ et s_Θ est la section canonique de $\mathcal{O}(\Theta)$, restreinte à A. Si l'on utilise la formule de changement de coordonnées

$$x + iy = x_1 + \Omega(y_1) = (x - \Re(\Omega)(\Im(\Omega))^{-1}y) + \Omega((\Im(\Omega))^{-1}y)$$

on peut réécrire, en utilisant la symétrie de $\Im(\Omega)$,

$$\|s_\Theta(z)\| = \det(\Im(\Omega))^{1/4}\exp(-\pi{}^t y_1\Im(\Omega)y_1)|\theta(z,\Omega)|.$$

On calcule maintenant

$$\begin{aligned}
&g_*(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_{\mathcal{A}_{[-1]}\backslash\Theta_{[-1]}}))\\
&\qquad = -2\log|\prod_{a,b}\det(\Im(\Omega))^{1/4}\ \exp(-\pi{}^t a\Im(\Omega)a)\theta(\Omega(a)+b,\Omega)|\\
&\qquad = -\log|\det(\Im(\Omega))|^{2^{2g-2}+2^{g-2}} - \log|\prod\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(0,\Omega)|^2\\
&\qquad =: -\log\|\chi_g(\Omega)\|^2_{\mathrm{Pet}}
\end{aligned}$$

où $\chi_g(\cdot)$ est la forme modulaire d'Igusa « produit des thêta constantes paires » (cf. [18, chap. II]) et $\|\cdot\|_{\mathrm{Pet}}$ est la norme associée à la métrique de Petersson. La somme porte sur les couples $(a,b) \in \mathbb{Q}^g$ tels que $a,b \in \{0,1/2\}$ et tels que $\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](0,\Omega) \neq 0$. Il y a $2^{2g} - 2^{g-1}(2^g-1) = 2^{2g-1}+2^{g-1}$ tels couples. Ceci résulte par exemple de la formule de Lefschetz habituelle appliquée à $[-1]$ agissant sur $\Theta_{\mathbb{C}}|_A$. Par ailleurs,

$$8\cdot g_*(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_{\mathcal{A}_{[-1]}\setminus\Theta_{[-1]}}))=4\cdot(2^{2g-1}+2^{g-1})\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega})+2g\cdot(2^{2g-1}+2^{g-1})\log(4\pi)$$

ce qui implique la

Proposition 3.1. — *L'égalité*

$$(2^{2g-2}+2^{g-2})\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega})+\frac{g}{4}(2^{2g-1}+2^{g-1})\log(4\pi)=-\log\|\chi_g(\Omega)\|^2_{\mathrm{Pet}}$$

est vérifiée.

Supposons à présent que S est le spectre d'un anneau de Dedekind et affaiblissons les hypothèses précédentes en supposant seulement que Θ est lisse au-dessus d'un ouvert non-vide V de B. Supposons de plus que $B=S$ et que le schéma $\mathcal{A}_{[-1]}$ est la réunion disjointe de 2^{2g} sections $B\to\mathcal{A}$.

Soit maintenant

$$Z:=\mathrm{Zar}(\mathcal{A}_{[-1],V}\setminus\Theta_{[-1],V})$$

l'adhérence schématique de $\mathcal{A}_{[-1],V}\setminus\Theta_{[-1],V}$. On cherche alors à calculer

$$g_*(\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\mathcal{O}}(\Theta)|_Z)).$$

Soit $u_1,\dots,u_{(2^{2g-1}+2^{g-1})}$ une énumération des sections formant Z. Une variante du calcul fait plus haut donne alors la

Proposition 3.2. — *L'égalité*

$$\begin{aligned}(2^{2g-2}+2^{g-2})\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega})&+\frac{g}{4}(2^{2g-1}+2^{g-1})\log(4\pi)\\&=\sum_{j=1}^{2^{2g-1}+2^{g-1}}\ \sum_{P\in u_j\cap\Theta}\mathrm{long}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A},P}}(\mathcal{O}_{u_j\cap\Theta})\cdot\pi_*(P)-\log\|\chi_g(\Omega)\|^2_{\mathrm{Pet}}\end{aligned}$$

est vérifiée.

4. Les formes modulaires de Yoshikawa de deuxième type

On se donne un schéma régulier et intègre $\mathcal{B}$, quasi-projectif sur un anneau arithmétique D de corps de fractions K et tel que 2 est inversible sur D. On se donne également un schéma intègre et régulier $\mathcal{T}$ et un morphisme projectif, plat $f:\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ tel que $f_K:\mathcal{T}_K\to\mathcal{B}_K$ est lisse et dont on note ω le faisceau canonique relatif associé. On notera $B:=\mathcal{B}_K$ (resp. $T:=\mathcal{T}_K$) la fibre générique de B (resp. $\mathcal{T}$) sur D.

On suppose que T est un schéma en surfaces K3 sur B. Par définition, cela signifie que les fibres géométriques de f_K sont des surfaces K3. On munit $T(\mathbb{C})$

d'une structure de fibration Kählerienne ν. On suppose aussi que le morphisme d'adjonction

$$f^* f_* \omega \to \omega$$

est un isomorphisme. Munissons ω de la métrique induite par la structure de fibration Kählerienne et $f^* f_* \omega$ de la métrique image réciproque par f de la métrique L^2. On écrira η pour la classe secondaire $\widetilde{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{F}})$ de la suite exacte de fibrés

$$\mathcal{F} : 0 \to f^* f_* \omega \to \omega \to 0 \to 0$$

munie de ces métriques.

On suppose de plus qu'il existe un automorphisme d'ordre 2 de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{B}$; on dispose ainsi d'une action de μ_2 sur $\mathcal{T}$; on note $\mathcal{T}_{\mu_2}$ son schéma des points fixes et l'on suppose que la restriction $f_{\mu_2} : \mathcal{T}_{\mu_2} \to \mathcal{B}$ du morphisme f est lisse. On notera g l'action de l'automorphisme sur $T(\mathbb{C})$ et η_g la restriction de la classe η à $T_g := \mathcal{T}_{\mu_2}(\mathbb{C})$. On suppose également que la fibration Kählerienne est équivariante pour l'action de g ; on note ν_g la restriction de ν à T_g. Enfin on notera d (resp. d_g) la dimension relative de T (resp. T_g) sur B.

On applique la formule de Lefschetz arithmétique au morphisme f, à l'action de μ_2 sur $\mathcal{T}$ et au fibré trivial $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ muni de sa métrique triviale. On note N le fibré conormal de $\mathcal{T}_{\mu_2}$ dans $\mathcal{T}$ et on le munit de la métrique induite par la structure de fibration Kählerienne. On obtient

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^0 f_* \overline{\mathcal{O}}) - \widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^1 f_* \overline{\mathcal{O}}) + \widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^2 f_* \overline{\mathcal{O}}) \\
&\qquad\qquad = f_{\mu_2 *}(\widehat{\mathrm{Td}}_{\mu_2}(\overline{Tf}))^{[1]} - \int_{T_g/B} \mathrm{Td}_g(Tf_{\mathbb{C}}) R_g(Tf_{\mathbb{C}}) + T_g(\overline{\mathcal{O}}).
\end{aligned}$$

On calcule dans $\widehat{\mathrm{CH}}^{\leqslant 2}(\mathcal{T}_{\mu_2})_{\mathbb{Q}}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Td}}_{\mu_2}(\overline{Tf}) &= \widehat{\mathrm{ch}}_{\mu_2}(1 - \overline{N})^{-1}\, \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{Tf}_{\mu_2}) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{N}) + \frac{1}{4}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{N})^2)^{-1}\, \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{Tf}_{\mu_2}) \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{N})\Big)\, \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{Tf}_{\mu_2}).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans $\widehat{\mathrm{CH}}^{\leqslant 2}(\mathcal{T}_{\mu_2})_{\mathbb{Q}}$, on a $\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{Tf}_{\mu_2}) = 1 - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2}) + \frac{1}{12}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2$, où $\overline{\omega}_{\mu_2}$ est le fibré des différentielles relatives de $\mathcal{T}_{\mu_2}$ sur $\mathcal{B}$, muni de la métrique induite. La partie de degré 2 de $\widehat{\mathrm{Td}}_{\mu_2}(\overline{Tf})$ est donc la partie de degré 2 de l'expression

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{N})\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2}) + \frac{1}{12}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2\Big)$$

qui est

$$\frac{1}{8}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{N})\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2}) + \frac{1}{24}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2. \tag{5}$$

On rappelle qu'on dispose d'une suite exacte équivariante

$$0 \to N \to \Omega \to \omega_{\mu_2} \to 0$$

sur $\mathcal{T}_{\mu_2}$. Pour des raisons de rang, cette suite est isométriquement scindée. On a donc

$$\widehat{\mathrm{c}}_1(N) = f_{\mu_2}^* \widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) - \eta_g - \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{T}_{\mu_2})$. On peut donc évaluer l'expression (5) comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\Big(f_{\mu_2}^* \widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) - \eta_g - \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\Big)\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2}) + \frac{1}{24}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2 \\ = \frac{1}{8} f_{\mu_2}^* \widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega})\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2}) - \frac{1}{12}\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2 - \frac{1}{8} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on calcule :

$$\begin{aligned}&\int_{T_g/B} \mathrm{Td}_g(Tf_{\mathbb{C}}) R_g(Tf_{\mathbb{C}}) \\ &= -2\int_{T_g/B}\Big((2\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1,-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1,-1))c_1(N) + (2\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1))c_1(\omega_{\mu_2})\Big) \\ &= -2\int_{T_g/B}\Big((6\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + (3-\log(16))\zeta_{\mathbb{Q}}(-1))c_1(N) \\ &\qquad\qquad + (2\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1))c_1(\omega_{\mu_2})\Big) \\ &= -2\int_{T_g/B}\Big(-(6\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + (3-\log(16))\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)) + (2\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1))\Big)c_1(\omega_{\mu_2}) \\ &= -2\int_{T_g/B}\Big(-4\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + (\log(16)-2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\Big)c_1(\omega_{\mu_2}) \\ &= -2G\Big(-4\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + (\log(16)-2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\Big)\end{aligned}$$

où G est une fonction localement constante sur $B(\mathbb{C})$. En un point $P \in B(\mathbb{C})$, G vaut

$$\sum_{C \subseteq T_{g,P}} (2 \cdot \mathrm{genre}(C) - 2)$$

où la somme porte sur les composantes connexes C de la fibre $T_{g,P}$ de T_g au-dessus de P. Pour résumer, on obtient

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^0 f_*\overline{\mathcal{O}}) - \widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^1 f_*\overline{\mathcal{O}}) + \widehat{\mathrm{c}}_{1,\mu_2}(R^2 f_*\overline{\mathcal{O}}) \\
&\qquad = \frac{G}{8}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) - \frac{1}{12} f_{\mu_2 *}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2 + T_g(\overline{\mathcal{O}}) - \frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g \\
&\qquad\qquad + 2G\Big(- 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + (\log(16) - 2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\Big).
\end{aligned}$$

Ceci implique en particulier le

Théorème 4.1. — *Supposons que toutes les fibres géométriques de f sont des surfaces K3, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&-\log\left|\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B}\nu^d\right| \\
&\qquad = \frac{G-8}{8}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) - \frac{1}{12} f_{\mu_2 *}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2 + T_g(\overline{\mathcal{O}}) - \frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g \\
&\qquad\qquad + 2G\Big(- 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + (\log(16) - 2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\Big).
\end{aligned}$$

Remarque. Lorsque $\mathcal{T}_{\mu_2}$ est vide, on trouve :

$$-\log\left|\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B}\nu^d\right| + \widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) = T_g(\overline{\mathcal{O}}) \tag{6}$$

sous les hypothèses du théorème 4.1. On aurait pu montrer directement ce résultat en appliquant le théorème de Riemann-Roch arithmétique au quotient $\mathcal{T}/\mu_2$. Borcherds [4] avait montré la trivialité (modulo torsion) de $f_*\omega$ en construisant explicitement une section non-nulle Φ de $(f_*\omega)^{\otimes 4}$. Pappas [19] redémontre (indépendamment de ce qui précède) le fait que $f_*\omega$ est de torsion sur $B(\mathbb{C})$ en appliquant le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au schéma $\mathcal{T}/\mu_2$. L'identité (6) montre que ces deux démonstrations, *a priori* totalement différentes, ne sont que les deux versants d'une même application du théorème de Riemann-Roch arithmétique. On notera que l'identité (6) implique même que l'ordre de $f_*\omega$ est une puissance de 2.

On peut exprimer la quantité $\frac{1}{12} f_{\mu_2 *}\,\widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2$ du Théorème 4.1 au moyen de la torsion analytique des fibres de T_g sur $B(\mathbb{C})$, via le théorème de Riemann-Roch arithmétique. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} f_{\mu_2 *}\, \widehat{\mathrm{c}}_1(\overline{\omega}_{\mu_2})^2 &= f_*(\widehat{\mathrm{Td}}(\mathcal{T}/\mathcal{B}))^{[1]} \\ &= -T(\overline{\mathcal{O}}_g) - \log\left|\frac{1}{d_g!(2\pi)^{d_g}} \int_{T_g/B} \nu_g^{d_g}\right| + \widehat{\mathrm{c}}_1(f_{\mu_2 *}\overline{\omega}_{\mu_2}) \\ &\qquad - \int_{T_g/B} (2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1)) c_1(\omega_{\mu_2})\end{aligned}$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathcal{B})_{\mathbb{Q}}$. Si l'on juxtapose cette dernière expression à celle du Théorème 4.1, on obtient

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathrm{c}}_1(f_{\mu_2 *}\overline{\omega}_{\mu_2}) + \frac{8-G}{8}\, \widehat{\mathrm{c}}_1(f_*\overline{\omega}) \\ &\quad = T_g(\overline{\mathcal{O}}) + T(\overline{\mathcal{O}}_g) - \frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g + \int_{T_g/B} (2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta_{\mathbb{Q}}(-1)) c_1(\omega_{\mu_2}) \\ &\quad + 2G\Big(- 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + (\log(16) - 2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)\Big) \\ &\quad + \log\left|\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B} \nu^d\right| + \log\left|\frac{1}{d_g!(2\pi)^{d_g}}\int_{T_g/B} \nu_g^{d_g}\right| \\ &\quad = T_g(\overline{\mathcal{O}}) + T(\overline{\mathcal{O}}_g) - \frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g - 6G\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{2G}{3}\log(2) + \frac{G}{4} \\ &\quad + \log\left|\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B} \nu^d\right| + \log\left|\frac{1}{d_g!(2\pi)^{d_g}}\int_{T_g/B} \nu_g^{d_g}\right|\end{aligned}$$

sous les hypothèses du Théorème 4.1. On suppose maintenant que $D = \mathbb{C}$; les hypothèses du Théorème 4.1 sont alors automatiquement satisfaites. Supposons par ailleurs que $f_*\omega$ a une section analytique trivialisante de norme L^2 constante. Ceci est le cas par exemple si la famille $\mathcal{T}$ est munie d'un marquage (cf. [27, Par. 1.2 (b)] pour cette notion). Soit κ un entier tel que le fibré $f_*\omega^{\otimes(8-G)\kappa} \otimes (\det f_{\mu_2 *}\omega_{\mu_2})^{\otimes 8\kappa}$ est trivial. Le fibré $(\det f_{\mu_2 *}\omega_{\mu_2})^{\otimes(-8\kappa)}$ est alors analytiquement trivial. Il existe donc t une section analytique trivialisante de $(\det f_{\mu_2 *}\omega_{\mu_2})^{\otimes 8\kappa}$ satisfaisant l'égalité

$$\begin{aligned}|t|_{L^2}^{-\frac{1}{4\kappa}} &= e^{T_g(\overline{\mathcal{O}})} \cdot e^{T(\overline{\mathcal{O}}_g)} \\ &\quad \cdot \left|\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B} \nu^d\right| \cdot \left|\frac{1}{d_g!(2\pi)^{d_g}}\int_{T_g/B} \nu_g^{d_g}\right| \cdot \exp\Big(-\frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g\Big).\end{aligned}$$

Écrivons $\mathrm{Vol}(T_g) := |\frac{1}{d_g!(2\pi)^{d_g}}\int_{T_g/B}\nu_g^{d_g}|$ et $\mathrm{Vol}(T) := |\frac{1}{d!(2\pi)^d}\int_{T/B}\nu^d|$. Soit r_+ (resp. r_-) la dimension du sous-espace de $H^2(T(\mathbb{C})_b, \mathbb{C})$ invariant par g (resp. celui où

g agit par -1) ; b étant un élément générique de $B(\mathbb{C})$. Remarquons que par la formule du point fixe holomorphe et la formule de Gauss-Bonnet généralisée (cf. [25, Example 3.8, chap. III, sec. 3, p.96] pour cette dernière), on a l'égalité

$$1 - 0 + r_+ - r_- + 1 - 0 = -G$$

et par ailleurs, le formulaire [2, VIII, 3.] nous assure que $r_+ + r_- = 22$. On en déduit que

$$G = 20 - 2r_+ \,.$$

On reprend maintenant l'expression pour $|t|_{L^2}^{-\frac{1}{4\kappa}}$ et on calcule

$$\begin{aligned} & e^{T_g(\overline{\mathcal{O}})} \cdot e^{T(\overline{\mathcal{O}}_g)} \cdot \mathrm{Vol}(T) \cdot \mathrm{Vol}(T_g) \cdot \exp(-\frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})\eta_g) \\ &= e^{T_g(\overline{\mathcal{O}})} \cdot e^{T(\overline{\mathcal{O}}_g)} \cdot \mathrm{Vol}(T) \cdot \mathrm{Vol}(T_g) \\ &\qquad \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})(\eta_g + \log|\mathrm{Vol}(T)|)\right) \cdot \mathrm{Vol}(T)^{\frac{G}{8}} \\ &= e^{T_g(\overline{\mathcal{O}})} \cdot e^{T(\overline{\mathcal{O}}_g)} \cdot \mathrm{Vol}(T)^{G/8+1} \cdot \mathrm{Vol}(T_g) \\ &\qquad \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})(\eta_g + \log|\mathrm{Vol}(T)|)\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$G/8 + 1 = \frac{G+8}{8} = \frac{20 - 2r_+ + 8}{8} = \frac{14 - r_+}{4}$$

et on conclut que

$$\begin{aligned} |t|_{L^2}^{-\frac{1}{4\kappa}} &= e^{T_g(\overline{\mathcal{O}})} \cdot e^{T(\overline{\mathcal{O}}_g)} \\ &\quad \cdot \mathrm{Vol}(T)^{\frac{14-r_+}{4}} \cdot \mathrm{Vol}(T_g) \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\int_{T_g/B} c_1(\overline{\omega}_{\mu_2})(\eta_g + \log|\mathrm{Vol}(T)|)\right). \end{aligned}$$

Il s'agit de l'égalité du théorème principal [27, Main Th., Introduction] de Yoshikawa.

5. Appendice : une formule du point fixe singulière conjecturale en théorie d'Arakelov

Soit D un anneau arithmétique d'anneau de fractions K et supposons que D est régulier. Soit $f : X \to \operatorname{Spec} D$ un schéma intègre, projectif sur D, dont la fibre sur K est lisse. Soit $h : Z \to \operatorname{Spec} D$ un schéma intègre et régulier, projectif sur D, dont la fibre sur K est lisse. Soit j une D-immersion fermée $X \hookrightarrow Z$. On munit Z d'une métrique Kählerienne ω_Z et on munit X de la structure ω_X induite. On se donne un nombre entier $n \geqslant 1$ et des structures μ_n-équivariantes sur X et Z telle que f, h, j soient μ_n-équivariants et que la structure ω_Z soit $\mu_n(\mathbb{C})$-invariante (D est supposé muni de la structure équivariante triviale). Soit enfin $R(\mu_n) = \mathbb{Z}/(1-T^n)$ le groupe de Grothendieck des μ_n-comodules de type fini sur $\mathbb{Z}$. On choisit un racine primitive n-ième de l'unité ζ_n et une $R(\mu_n)$-algèbre $\mathcal{R}$ telle que les éléments $1-T^k$ ($k = 1, \dots, n-1$) sont inversibles dans $\mathcal{R}$.

Soit N le fibré conormal de l'immersion $Z_{\mu_n} \hookrightarrow Z$. Soit enfin $\sum_i r_i \overline{E}_i$ une $\mathcal{R}$ combinaison linéaire finie de fibrés hermitiens sur Z_{μ_n} tels que $\sum_i r_i \overline{E}_i = (\Lambda_{-1}(\overline{N}))^{-1}$ dans $\widehat{\mathrm{K}}_0^{\mu_n}(Z_{\mu_n}) \otimes_{R(\mu_n)} \mathcal{R}$.

Soit $\overline{E}$ un fibré hermitien μ_n-équivariant sur X.

On remarque que l'immersion $X_{\mathbb{C}} \hookrightarrow Z_{\mathbb{C}}$ est régulière et on a donc

$$\underline{\mathrm{Tor}}^k_{\mathcal{O}_Z}(j_*E, \mathcal{O}_{Z_{\mu_n}})_{\mathbb{C}} \simeq j_{\mathbb{C}*}(\Lambda^k(F) \otimes E_{\mathbb{C}}),$$

où F est un fibré localement libre défini sur $X_{\mu_n,\mathbb{C}}$ par la suite exacte

$$\mathcal{F} : 0 \to F \to N_{Z_{\mu_n,\mathbb{C}}/Z_{\mathbb{C}}} \to N_{X_{\mu_n,\mathbb{C}}/X_{\mathbb{C}}} \to 0$$

(voir [11, Exp. VII, Prop. 2.5]). Nous munissons le fibré F de la métrique induite par $N_{Z_{\mu_n}/Z}$.

Pour tout $l \geqslant 0$, les fibrés cohérents $R^l h_*(E_i \otimes \underline{\mathrm{Tor}}^k_{\mathcal{O}_Z}(j_*E, \mathcal{O}_{Z_{\mu_n}}))$ (qui sont localement libres sur la fibre générique) peuvent être munis de métriques hermitiennes via l'isomorphisme naturel

$$R^l h_*(E_i \otimes \underline{\mathrm{Tor}}^k_{\mathcal{O}_Z}(j_*E, \mathcal{O}_{Z_{\mu_n}}))_{\mathbb{C}} \simeq R^l f_{\mathbb{C}*}(j^*(E_{i,\mathbb{C}}) \otimes \Lambda^k(F) \otimes E_{\mathbb{C}}).$$

Par abus de notation, on notera $R^l h_*(\overline{E}_i \otimes \underline{\mathrm{Tor}}^k_{\mathcal{O}_Z}(j_*\overline{E}, \overline{\mathcal{O}}_{Z_{\mu_n}}))$ le fibré cohérent hermitien sur D (« hermitian coherent sheaf » en anglais) correspondant.

Conjecture 5.1. — *L'égalité*

$$\begin{aligned}\sum_{l\geqslant 0}(-1)^l R^l f_*(\overline{E}) - T_g(\overline{E}_{\mathbb{C}}) &= \sum_i r_i \sum_{l,k\geqslant 0}(-1)^{l+k} R^l h_*(\overline{E}_i \otimes \underline{\mathrm{Tor}}^k_{\mathcal{O}_Z}(j_*\overline{E}, \overline{\mathcal{O}}_{Z_{\mu_n}}))\\
&- \sum_i r_i \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k T_g(j^*_{\mu_n}(\overline{E}_{i,\mathbb{C}}) \otimes \Lambda^k(\overline{F}) \otimes \overline{E}_{\mathbb{C}}|_{X_{\mu_n}})\\
&+ \int_{X_{\mu_n}} \mathrm{Td}(\overline{\mathrm{T}X}_{\mathbb{C}})\,\mathrm{ch}_g(\overline{E}_{\mathbb{C}})\,\widetilde{\mathrm{Td}}_g(\overline{\mathcal{F}})\,\mathrm{Td}_g^{-1}(\overline{F})\\
&- \int_{X_{\mu_n}} \mathrm{Td}_g(\mathrm{T}X_{\mathbb{C}})\,\mathrm{ch}_g(E_{\mathbb{C}}) R_g(N_{X_{\mu_n,\mathbb{C}}/X_{\mathbb{C}}})\end{aligned}$$

est vérifiée dans $\widehat{\mathrm{K}}_0^{\mu_n{}'}(D) \otimes_{R(\mu_n)} \mathcal{R}$.

Cette conjecture est inspirée par la formule [24, Th. 3.5].

Références

[1] Dan Abramovich, *Subvarieties of semiabelian varieties*, Compositio Math. **90** (1994), no. 1, 37–52.

[2] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[3] Jean-Michel Bismut and Kai Köhler, *Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 4, 647–684.

[4] Richard E. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), no. 3, 699–710.

[5] J.-B. Bost, *Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 1, 21–70.

[6] William Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[7] Henri Gillet and Christophe Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543.

[8] ———, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 1, 163–203.

[9] ———, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. II*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 2, 205–238.

[10] Henri Gillet, Damian Rössler, and Christophe Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch theorem in higher degrees*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 6, 2169–2189 (English, with English and French summaries).

[11] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6) ; Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre ; Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225.

[12] Friedrich Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German edition by R. L. E. Schwarzenberger, with an additional section by A. Borel. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[13] Kai Köhler and Damian Roessler, *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. I. Statement and proof*, Invent. Math. **145** (2001), no. 2, 333–396.

[14] J. Kramer and R. Salvati Manni, *An integral characterizing the Andreotti-Mayer locus*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **72** (2002), 47–57.

[15] Vincent Maillot and Damian Roessler, *On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross-Deligne*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 2, 727–754.

[16] Laurent Moret-Bailly, *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann*, Compositio Math. **75** (1990), no. 2, 203–217.

[17] Christophe Mourougane, *Computations of Bott-Chern classes on* $\mathbf{P}(E)$, Duke Math. J. **124** (2004), no. 2, 389–420.

[18] David Mumford, *Tata lectures on theta. I*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007. With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman ; Reprint of the 1983 edition.

[19] Georgios Pappas, *Grothendieck-Riemann-Roch and the moduli of Enriques surfaces*, Math. Res. Lett. **15** (2008), no. 1, 117–120.

[20] D. B. Ray and I. M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 154–177.

[21] Damian Rössler, *Riemann-Roch formulae in Arakelov geometry and applications.*, Notes of a minicourse given at the CRM in Barcelona (Spain) during the last week of February 2006. A revised form of this text will appear in the series Adv. Courses Math. CRM Barcelona.

[22] Damian Roessler, *An Adams-Riemann-Roch theorem in Arakelov geometry*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 1, 61–126.

[23] Harry Tamvakis, *Bott-Chern forms and arithmetic intersections*, Enseign. Math. (2) **43** (1997), no. 1-2, 33–54.

[24] R. W. Thomason, *Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algébrique*, Duke Math. J. **68** (1992), no. 3, 447–462.

[25] Raymond O. Wells Jr., *Differential analysis on complex manifolds*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 65, Springer, New York, 2008. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada.

[26] Ken-ichi Yoshikawa, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **52** (1999), no. 1, 73–115.

[27] Ken-Ichi Yoshikawa, *$K3$ surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 53–117.

V. Maillot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ), Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France
E-mail : `vmaillot@math.jussieu.fr`

D. Rössler, CNRS, Équipe d'Arithmétique et Géométrie Algébrique, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `damian.rossler@math.u-psud.fr`