Schéma de résolution d'un problème de séries numériques

Géométrique : $\sum q^n$, $q \in \mathbb{R}$
converge $\iff$ $|q| < 1$
et alors $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$

Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$
converge $\iff$ $\alpha > 1$

Riemann alternée : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$
converge $\iff$ $\alpha > 0$
converge absolument $\iff$ $\alpha > 1$

Télescopique : $\sum u_n$, avec $u_n = v_n - v_{n+1}$
converge $\iff$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Nature de la série $\sum u_n$?

OUI

Série de référence ?

NON

Condition *nécessaire* de convergence : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$?

Non suffisante : $\lim \frac{1}{n} = 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

NON

$\sum u_n$ diverge

OUI

Signe des u_n à partir d'un certain rang n_0 ?

signe quelconque

Convergence absolue : $\sum |u_n|$ converge ?
(série à termes positifs)

OUI

$\sum u_n$ converge (absolument)

NON

Série alternée ? $u_n u_{n+1} \leq 0$

OUI

Théorème spécial des séries alternées
si $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0, $\sum u_n$ converge
(semi-convergente si non absolument convergente)

NON

Hors programme

$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq 0$
termes positifs

$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq 0$
termes négatifs

$\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature ; $\sum(-u_n)$ est à termes positifs

Séries à termes positifs

1) **Comparaison** : si $0 \leq u_n \leq v_n$,
$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ; $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge
2) **Équivalents** : si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature
3) **Règles de Cauchy / de d'Alembert** :
Cauchy : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ d'Alembert $(u_n > 0)$: $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$
$l < 1$: $\sum u_n$ converge ; $l > 1$: $\sum u_n$ diverge ; $l = 1$: on ne peut pas conclure