Comment résoudre une EDO linéaire d'ordre 1 ou 2 ?

Ordre 1

Coefficients constants
$ay'(x) + by(x) = f(x)$

- Solution homogène y_h : $ay'(x) + by(x) = 0$
  - $y_h(x) = Ce^{rx}$ avec $r = -\dfrac{b}{a}$
- Solution particulière y_p : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$
  - Si $\lambda \neq r$: $y_p(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$
  - Si $\lambda = r$: $y_p(x) = e^{\lambda x}\, x\, Q_n(x)$
- Solution particulière y_p : f quelconque
  - Solution évidente
  - **Variation de la constante** (ci-dessous)

Coefficients variables
$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$

- Solution homogène y_h : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$
  - $y_h(x) = Ce^{u(x)}$ avec $u'(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$
- Solution particulière y_p : f quelconque
  - **Variation de la constante**
    - chercher $y_p(x) = C(x)e^{u(x)}$
    - calculer $y_p'(x)$ et injecter dans (E)
    - après simplification : $C'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}\, e^{-u(x)}$
    - prendre une primitive pour obtenir $C(x)$, puis $y_p(x)$

Solution générale :
$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
y_h : solution générale de l'EDO homogène (E_h)
y_p : une solution particulière de (E)

Principe de superposition :
si y_{p1}, y_{p2} sont solutions avec seconds membres f_1, f_2, alors $\lambda_1 y_{p1} + \lambda_2 y_{p2}$ est solution avec second membre $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$

Ordre 2

Coefficients constants
$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

- Solution homogène y_h : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$
  - Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$
    - Si $\Delta > 0$: racines $r_1 \neq r_2$: $y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
    - Si $\Delta = 0$: $r = -\dfrac{b}{2a}$: $y_h(x) = (A + Bx)\, e^{rx}$
    - Si $\Delta < 0$: $r = \alpha \pm i\beta$: $y_h(x) = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)$
- Solution particulière y_p : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$
  - λ non racine : $y_p(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$
  - λ racine simple : $y_p(x) = e^{\lambda x}\, x\, Q_n(x)$
  - λ racine double : $y_p(x) = e^{\lambda x}\, x^2 Q_n(x)$
- Solution particulière y_p : $f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$
  - $y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$
- Solution particulière y_p : f quelconque
  - Solution évidente
  - **Variation des constantes** (ci-dessous)

Coefficients variables
$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$

- Solution homogène y_h : $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$
  - **Réduction d'ordre**
    - « deviner » une solution y_1 : x, x^2, e^x (si $a(x) + b(x) + c(x) = 0$, e^x est solution)
    - chercher $y_2(x) = C(x)\, y_1(x)$, C non constante
    - dériver et injecter dans (E_h)
    - $y_h(x) = \lambda\, y_1(x) + \mu\, y_2(x)$
    - y_1, y_2 linéairement indépendantes (non proportionnelles) : $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ (W : Wronskien)
- Solution particulière y_p : f quelconque
  - Solution évidente
  - **Variation des constantes**
    - chercher $y_p(x) = A(x)\, y_1(x) + B(x)\, y_2(x)$
    - résoudre le système en $(A'(x), B'(x))$:
      $$(S)\ \begin{cases} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)} \end{cases}$$
      (déterminant de (S) : le Wronskien $W(y_1, y_2) \neq 0$)
    - intégrer pour obtenir $A(x)$ et $B(x)$