Optimisation du dispatch du mix électrique français

Aude Rondepierre

aude.rondepierre@insa-toulouse.fr



Cours du Parcours Transverse Pluridisciplinaire (PTP) Energie - INSA Toulouse 2026-2027

Organisation du cours

1. Le modèle EOLES_elec
   - Présentation et motivation
   - Formulation du modèle
   - Sensibilité aux hypothèses de coûts et de demande
   - Un modèle jouet issu de EOLES
2. Programmation linéaire : modélisation et résolution graphique
   - Modélisation
   - Formes canonique et standard
   - Résolution graphique
3. Algorithme du simplexe
   - Principe et exemple introductif
   - Formalisation générale
   - Cas particuliers et limites
4. Dualité : le prix de l'électricité est un prix marginal

Partie 1

Le modèle EOLES_elec

Pourquoi optimiser le mix électrique français, ce que le modèle produit – et ce qu'il ne dit pas

1. Le modèle EOLES_elec
   - Présentation et motivation
   - Formulation du modèle
   - Sensibilité aux hypothèses de coûts et de demande
   - Un modèle jouet issu de EOLES

Pourquoi optimiser le mix électrique français ?

Le point de départ : un mix déjà très bas-carbone

En 2025, 547,5 TWh produits, dont **95,2 % bas-carbone** : nucléaire ∼68 %, hydraulique 11,4 %, éolien 9,1 %, solaire 6 %. [RTE, Bilan électrique 2025]

Trois évolutions rendent ce mix insuffisant à l'horizon 2050 :

- la sortie des fossiles (neutralité carbone visée par la SNBC) ;
- l'électrification des usages, donc une **demande en hausse** ;
- des renouvelables **variables**, donc un besoin de flexibilité et de stockage.

La question

Quel mix de production et de stockage, au moindre coût, pour satisfaire la demande **à chaque heure** ?

Qu'est-ce que EOLES ?

EOLES : Energy Optimization for Low Emission Systems

Une famille de modèles d'optimisation énergétique, développée au CIRED (Centre International de Recherche sur l'Environnement et le Développement):

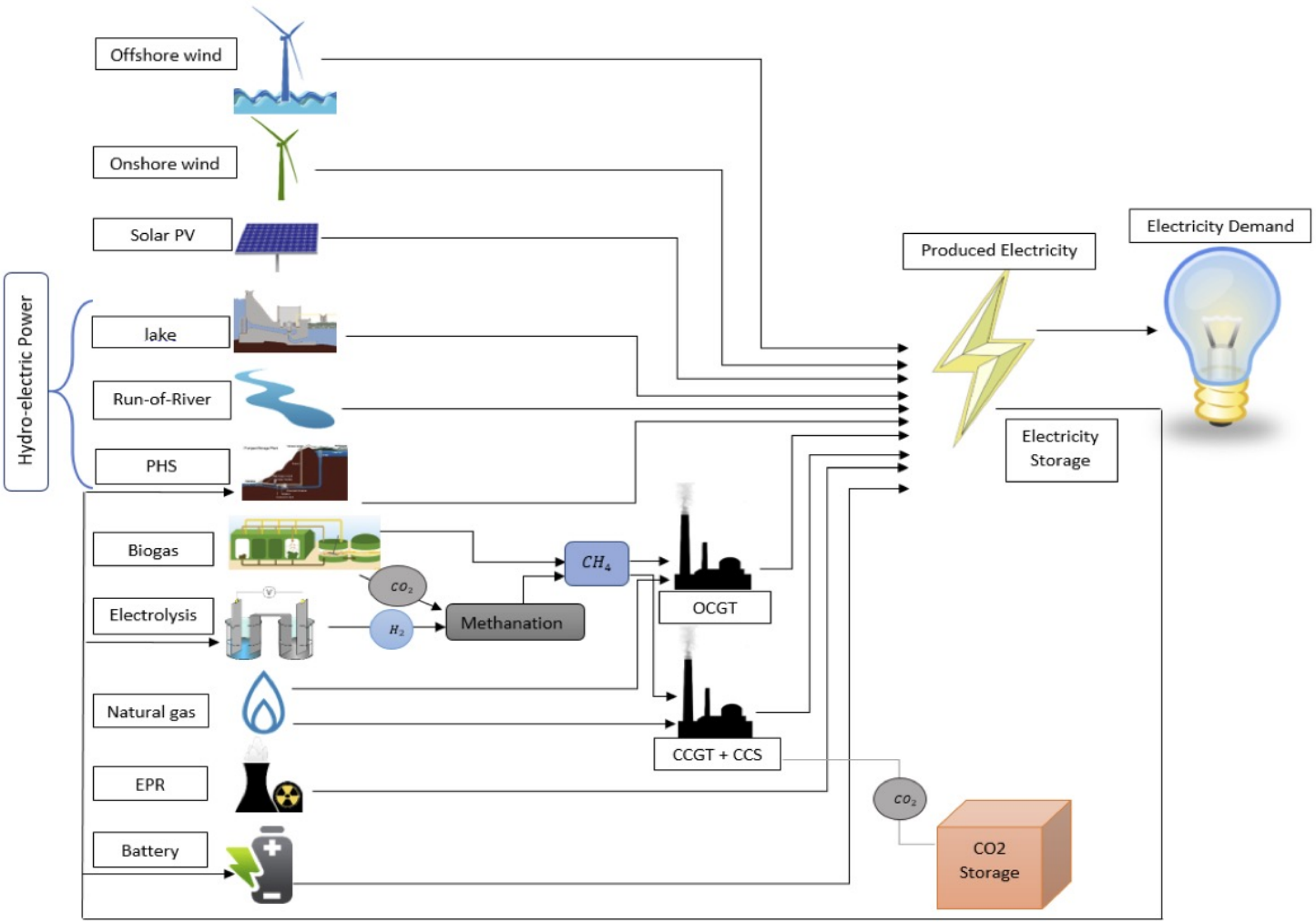
`https://www.centre-cired.fr/the-eoles-family-of-models/`

- **Objectif** : calculer le mix de production et de stockage qui satisfait la demande *à chaque heure* au moindre coût total.
  - **Ce qu'il décide** : quoi construire (les capacités) *et* comment le piloter (le dispatch horaire) — les deux simultanément.
  - **Ce qu'on en fait** : tester l'effet d'une hypothèse (coût d'une technologie, niveau de demande, prix du carbone) sur le mix optimal.

Versions principales

- **EOLES_elec** : version électricité (mix complet)
- **EOLES_elecRES** : 100% énergies renouvelables

Le modèle EOLES_elec, vue d'ensemble



Graphical description of the EOLES_elec model

Behrang Shirizadeh and Philippe Quirion. CIRED Working Paper N° 2020-79 - Février 2020

Le modèle EOLES_elec

Objectif

Minimiser le coût total annualisé du système électrique, qui comprend :

$$\begin{aligned} \text{COST} \quad = \quad & \sum[\text{investissements annualisés}] + \sum[\text{O\&M fixes}] \\ & + \sum[\text{O\&M variables}] + \sum[\text{coût carbone}] \end{aligned}$$

1. Coûts d'investissement annualisés (CAPEX)
   - Les capacités de production installées (moins les capacités existantes déjà amorties): éolien offshore, onshore, PV, nucléaire, turbines à gaz, hydroélectricité
   - Les capacités de stockage d'énergie (en €/MWh): STEP, batteries Li-Ion, méthanation
   - Les puissances de charge/décharge des systèmes de stockage (en €/MW) ("vitesse à laquelle on charge/décharge")
2. Coûts d'exploitation et maintenance
   - Coûts fixes de fonctionnement (proportionnels aux capacités installées)
   - Coûts variables d'exploitation (proportionnels à l'énergie produite)
3. Coût du carbone
   - Émissions de CO2 $\times$ prix social du carbone (SCC)

Le modèle EOLES_elec

Objectif

$$\begin{aligned} \text{COST} = &\sum_{tec} [(Q_{tec} - q^{ex}_{tec}) \times annuity_{tec}] + \sum_{str} (VOLUME_{str} \times annuity^{en}_{str}) \\ &+ \sum_{tec} (Q_{tec} \times fO\&M_{tec}) + \sum_{str} \left(S_{str} \times \left(capex^{ch}_{str} + fO\&M^{ch}_{str} \right) \right) \\ &+ \sum_{h} \sum_{tec} (G_{tec,h} \times (vO\&M_{tec} + e_{tec} SCC_{CO_2})) \end{aligned} \quad (1)$$

Variable	Unité	Description
Q_{tec}	GW	Capacité installée de la technologie *tec*
$G_{tec,h}$	GWh	Production d'électricité par la technologie *tec* à l'heure *h*
$STORAGE_{str,h}$	GWh	Électricité entrant à l'heure *h* dans le stockage *str*
$STORED_{str,h}$	GWh	Énergie stockée à l'heure *h* dans le stockage *str*
$VOLUME_{str}$	GWh	Capacité de stockage d'énergie dans la technologie *str*
S_{str}	GW	Capacité de recharge installée par technologie de stockage *str*

Table: Variables du modèle EOLES_elec

1. **Adéquation offre-demande**

$$\forall h = 1, \ldots, T, \ \sum_{tec} G_{tec,h} \geq demand_h + \sum_{str} STORAGE_{str,h}$$

2. **Contraintes de stockage**

$$STORED_{str,h+1} = STORED_{str,h} + \left(STORAGE_{str,h} \times \eta_{str}^{in} \right) - \frac{G_{str,h}}{\eta_{str}^{out}}.$$

3. **Limites techniques**
   - Capacités maximales par technologie, facteurs de charge annuels, Taux de rampe (nucléaire : 25%/heure), volumes et puissances de stockage, contraintes mensuelles sur les barrages, réserves de fréquence (FRR).

Le modèle EOLES

- Minimise le **coût total annualisé** du système électrique
- Sous contraintes de :
  - Satisfaction de la demande horaire
  - Réserves de fréquence
  - Limites techniques des technologies
- Données en entrée :
  - Facteurs de charge heure par heure (la production électrique dépend du mix électrique installé et des conditions météo)
  - Profil de consommation heure par heure (différents scénarii possibles)

Le modèle EOLES optimise donc simultanément investissements (choix d'un mix) et le dispatch horaire (stratégie de stockage/déstockage).

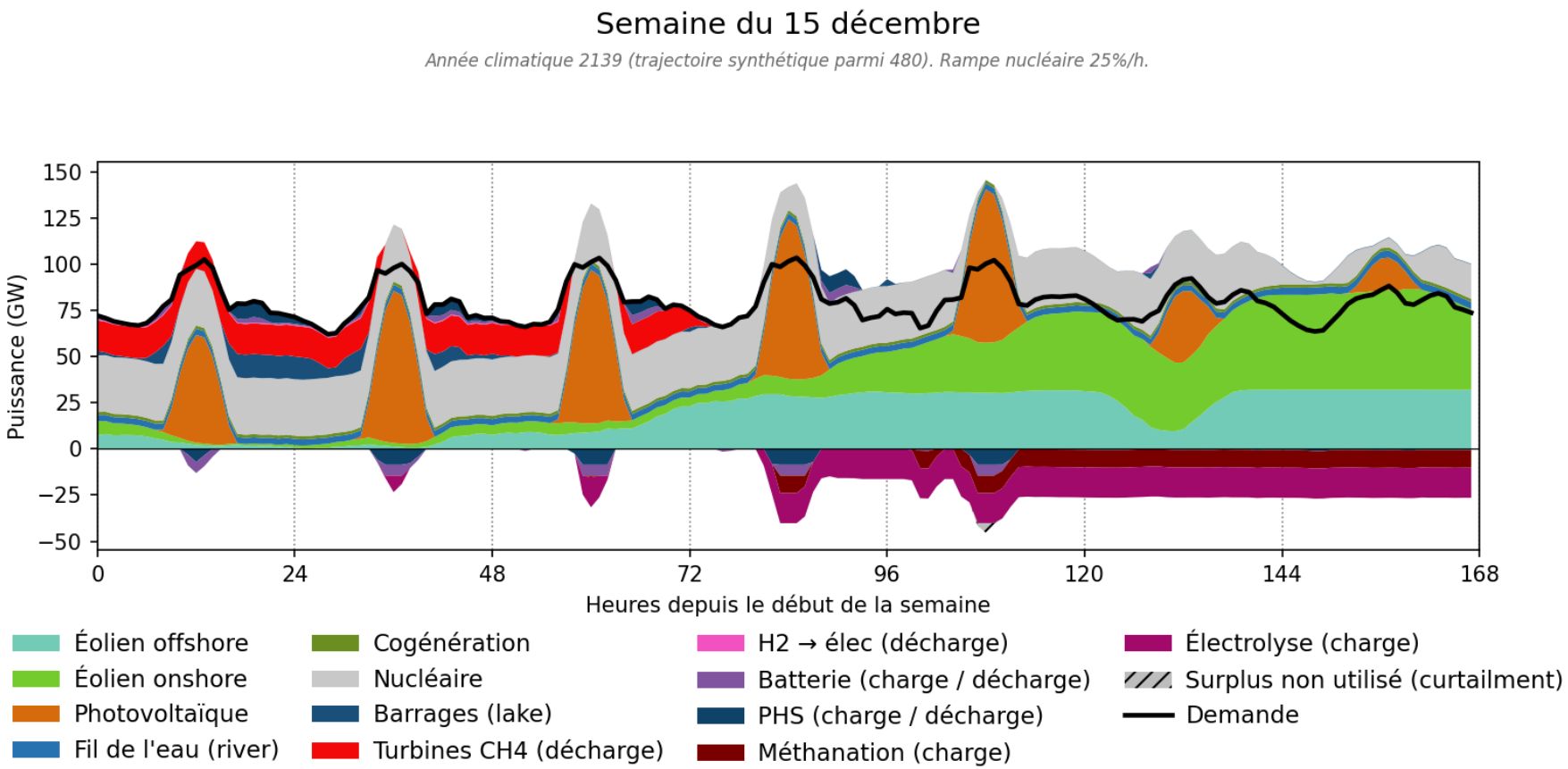
Hypothèses simplificatrices

1. **Spatialisation** : France continentale = nœud unique
2. **Demande** : Inélastique (pas de gestion de la demande)
3. **Information parfaite** : Connaissance complète de la météo et de la demande
4. **Horizon temporel** : Projections pour 2050, en *greenfield* (parc reconstruit à neuf, sans prolongation des réacteurs existants)
5. **Linéarité** : Fonctionnement du parc modélisé par un programme linéaire: il est en réalité non linéaire (rendements, rampes, coûts de démarrage)
   - Résolution via le solveur CPLEX sur GAMS: temps de calcul réduit, faible impact sur la précision des coûts et émissions CO2 [Palmintier, 2014]
   - Non pris en compte: les contraintes de démarrage, les paliers de puissance minimale

Code et données du modèle en accès libre : `github.com/BehrangShirizadeh/EOLES_elec`

Du pas annuel au pas horaire

Production, demande et stockage sur une semaine

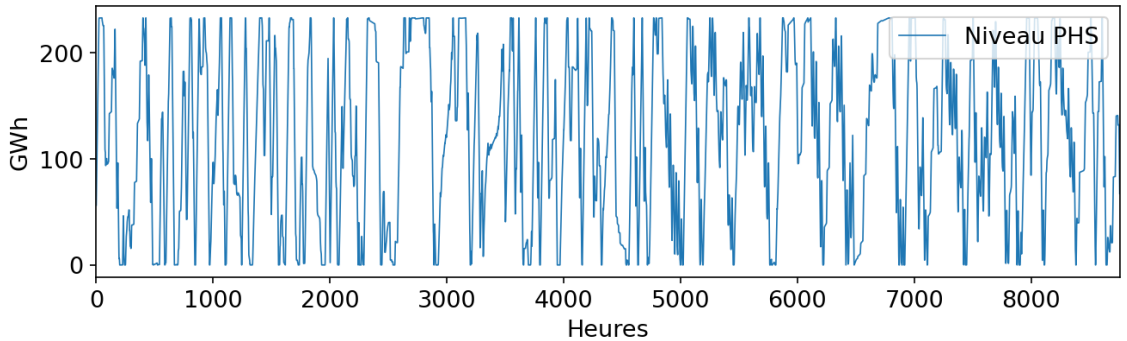


Au-dessus de la courbe de demande, la production part au stockage (charge, aire négative) ou est écrêtée (curtailment) : l'écart pile/demande EST la charge + le curtailment affichés sous l'axe zéro.

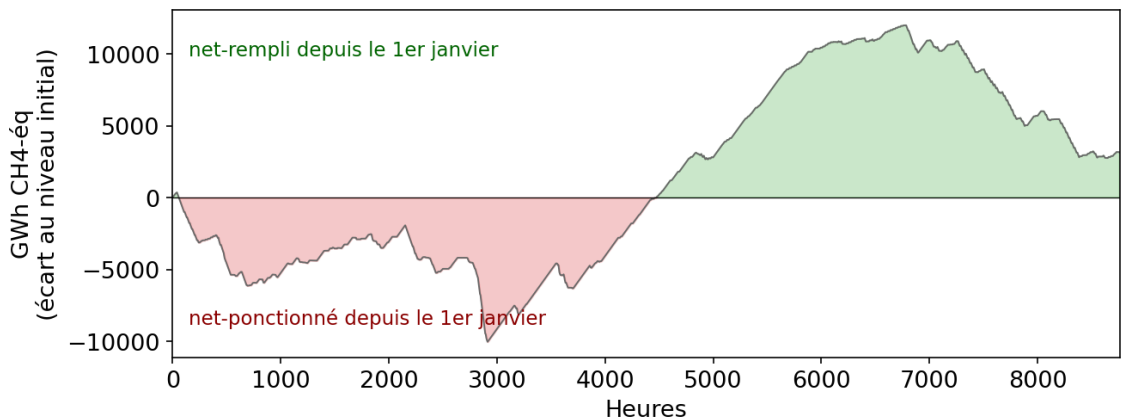
Stockage court terme et long terme : deux rôles distincts

Capacités optimales du scénario central, et allure de leur usage sur une année

Court terme (STEP): 9,3 GW / 180 GWh (**20 h**), rendement **85 %**.



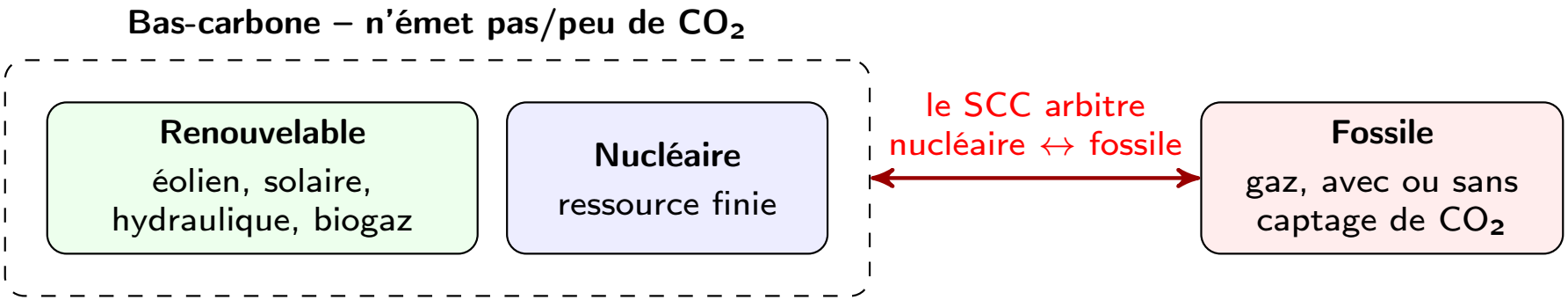
Long terme (méthanation): 16,9 **TWh** (×**94** la STEP), rendement **27 %**.



Le **volume** et le **rendement** les distinguent, pas la puissance: deux rôles, pas deux variantes interchangeables.

Éléments d'analyse du modèle EOLES

Vocabulaire et grille de lecture



Quatre questions:

1. Le mix optimal pour la France à l'horizon 2050 : quel est-il d'après le modèle, et dépend-il de la valeur retenue pour le coût du carbone (SCC)[a] ?
2. Le coût des technologies : de combien les hypothèses de coût déplacent-elles ce mix optimal ?
3. Le niveau de demande : quel est son effet sur le mix, comparé à celui du SCC ?
4. La structure du modèle : quelles conclusions ses hypothèses interdisent-elles de tirer ?

[a] SCC : estimation monétaire du dommage causé à la société par l'émission d'une tonne de CO_2, imposé dans le modèle comme un prix fictif pour faire porter ce coût aux émissions dans l'optimisation.

Le mix optimal pour la France en 2050 d'après EOLES

Un mix à ∼75 % de renouvelables

Le résultat

∼75 %

renouvelables

- Part couverte par les EnR dans le mix optimal, pour les hypothèses de coût retenues et une demande de **422 TWh/an** (en énergie produite, pas en puissance installée).
- Ne varie pas quand le coût social du carbone (SCC) varie de 0 à 500 €/tCO_2.

- Les 25 % restants se partagent entre **gaz** et **nucléaire**:
  - **gaz** si SCC nul, **nucléaire** si SCC élevé.
- Pas 100 % ? Les EnR pilotables (hydraulique, biogaz) sont **plafonnées** ; couvrir le dernier quart en variable coûterait en surcapacité et en stockage.

[Shirizadeh & Quirion, Energy Economics 95, 105004 (2021)]

Des mix très différents pour un coût presque identique

Sensibilité aux hypothèses de coût des technologies

Hypothèses de coût	EnR	Nucléaire
EnR chères, nucléaire bon marché	25 %	jusqu'à 75 %
Scénario central	**∼75 %**	**10–25 %**
EnR bon marché	jusqu'à 100 %	absent

46 à 53 €/MWh

la valeur optimale de l'objectif rapportée à la demande annuelle

Interdire totalement le nucléaire ne coûte que **5 %** de plus.

Pourquoi le nucléaire disparaît-il quand les EnR sont bon marché ?

- Des EnR bon marché ne laissent qu'une demande résiduelle **faible et pointue**.
- **Nucléaire** : coût presque tout **fixe**: rentable seulement en tournant en continu, pas sur ce profil résiduel.
- **Gaz** : **peu cher à construire** et **flexible**, payé seulement quand il tourne.

Confirmation indépendante : Schlachtberger *et al.* (2018) trouvent pour la France un coût de système très proche avec un mix beaucoup plus éolien.

Effet du niveau de demande sur le mix optimal

Scénarios de demande du débat national sur la transition énergétique (DNTE)

Scénario	Demande 2050	Part du pilotable renouvelable	Mix optimal
SOB (sobriété)	280 TWh	∼27 %	$>$ **90 % renouvelable** quel que soit le SCC ; nucléaire marginal
EFF (efficacité)	422 TWh	∼18 %	∼75 % renouvelable — scénario de référence
DIV (divergence)	534 TWh	∼14 %	part du nucléaire en forte hausse

Le mécanisme. Hydraulique et biogaz, les ressources les moins chères, sont **plafonnés** indépendamment de la demande. Quand la demande baisse, ils en couvrent une part croissante, réduisant d'autant le besoin en variable, stockage et capacité ferme : d'où plus de renouvelable, et un coût *par MWh consommé* plus faible.

La frontière du modèle. La demande est une **donnée d'entrée**: EOLES compare des scénarios sans jamais quantifier ce qu'il en coûte de basculer de l'un à l'autre.

Limites du modèle EOLES

Hypothèse	**Effet sur le résultat**
Un seul nœud	Ni réseau ni coût de raccordement : favorise l'éolien et le PV, diffus par nature. Et, sans interconnexions, on sous-estime le gain à mutualiser des régimes météo voisins.
Information parfaite	Le stockage est piloté par un devin, donc plus efficace qu'un opérateur réel.
Aucun critère de sûreté	On minimise un **coût**, pas un **risque de défaillance** (norme française : $\sim$3 h/an).
Demande donnée	EOLES optimise le système qui sert une demande, il ne dit rien sur ce qu'il en coûte de la faire baisser.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Hypothèses de travail

Objectif

Etant donné un mix électrique 100% renouvelable pour la France en 2050, optimiser le dispatch pour minimiser les déficits.

- Deux technologies de production:
  - Éolien onshore
  - Solaire photovoltaïque
- Deux technologies de stockage:
  - Stockage court terme : STEP (pompage-turbinage).
    - Puissance : 9,3 GW
    - Rendement : 75%
  - Stockage long terme : Power-to-Gas (méthanation)
    - Puissance entrée : 7,66 GW - Puissance sortie : 32,93 GW
    - Rendement : 40%
- Demande: Scénario ADEME 2050
  - 422 TWh/an
  - Profil horaire sur 8760h

Les données en entrée

- Facteurs de charge horaires (éolien, solaire)

  $prod_h$ (GW) : production fatale éolien + solaire à l'heure h (combinés aux capacités installées).

- Demande horaire en électricité (scénario ADEME 2050)

  $demand_h$ (GW) : demande électrique à l'heure h.

pour $h = 1, \ldots, T$, avec $T = 8760$.

✍ Ce sont des paramètres fixés avant résolution : c'est ce qui les distingue des variables de décision que vous allez introduire dans l'exercice qui suit.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Exercice : formulez le problème d'optimisation

À partir des hypothèses précédentes (2 technologies de production, 2 stockages, demande horaire sur $T = 8760$ heures), formulez le problème d'optimisation du dispatch :

1. Variables : lesquelles, à chaque heure h ?
2. Objectif : minimiser les déficits, sans vider le stock long terme juste avant T ?
3. Contraintes techniques : quelles bornes de puissance et de volume ?
4. Équilibre offre–demande : quelle contrainte à chaque heure ?
5. Évolution des stocks : comment passer de h à $h + 1$?
6. Initialisation : quels niveaux à $h = 0$?

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Correction (1/6) : variables de décision

Piloter PHS et P2G pour combler l'écart production–demande, heure par heure, en minimisant les déficits annuels sans vider le stock long terme.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Correction (1/6) : variables de décision

Piloter PHS et P2G pour combler l'écart production–demande, heure par heure, en minimisant les déficits annuels sans vider le stock long terme.

Déficit : $deficit_h$ (GW) : électricité non fournie à l'heure h.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Correction (1/6) : variables de décision

Piloter PHS et P2G pour combler l'écart production–demande, heure par heure, en minimisant les déficits annuels sans vider le stock long terme.

Déficit : $deficit_h$ (GW) : électricité non fournie à l'heure h.

PHS (court terme)

$phs_{in,h}$ (GW) : électricité **prélevée** à l'heure h pour charger le PHS.

$phs_{out,h}$ (GW) : électricité **restituée** par le PHS à l'heure h.

$phs_{level,h}$ (GWh) : niveau du stock PHS à l'heure h.

PTG (long terme)

$ptg_{in,h}$ (GW) : électricité **prélevée** à l'heure h pour l'électrolyse/méthanation.

$ptg_{out,h}$ (GW) : électricité **restituée** par les turbines gaz à l'heure h.

$ptg_{level,h}$ (GWh) : niveau du stock de gaz à l'heure h.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Correction (1/6) : variables de décision

Piloter PHS et P2G pour combler l'écart production–demande, heure par heure, en minimisant les déficits annuels sans vider le stock long terme.

Déficit : $deficit_h$ (GW) : électricité non fournie à l'heure h.

PHS (court terme)

$phs_{in,h}$ (GW) : électricité **prélevée** à l'heure h pour charger le PHS.

$phs_{out,h}$ (GW) : électricité **restituée** par le PHS à l'heure h.

$phs_{level,h}$ (GWh) : niveau du stock PHS à l'heure h.

PTG (long terme)

$ptg_{in,h}$ (GW) : électricité **prélevée** à l'heure h pour l'électrolyse/méthanation.

$ptg_{out,h}$ (GW) : électricité **restituée** par les turbines gaz à l'heure h.

$ptg_{level,h}$ (GWh) : niveau du stock de gaz à l'heure h.

$$x_h = (phs_{in,h}, phs_{out,h}, phs_{level,h}, ptg_{in,h}, ptg_{out,h}, ptg_{level,h}, deficit_h) \geqslant 0, \text{ pour } h = 1, \ldots, T.$$

7 variables par heure $\times$ 8760 heures = 61320 variables !

Objectif

Minimiser les déficits cumulés sur l'année, sans vider le stock de gaz (long terme) juste avant la dernière heure T.

Objectif

Minimiser les déficits cumulés sur l'année, sans vider le stock de gaz (long terme) juste avant la dernière heure T.

$$\min \alpha \sum_{h=1}^{T} deficit_h - ptg_{level,T},$$

avec:

- $\alpha > 0$: coefficient de pondération.
- $T = 8760$ dernière heure de l'année
- $deficit_h (\geqslant 0)$: quantité d'électricité non fournie à l'heure h.
- $ptg_{level,T}$ quantité de gaz stocké à l'heure T.

Contraintes techniques

Borner la puissance (charge et décharge) et le volume de chaque stockage, PHS et P2G.

Contraintes techniques

Borner la puissance (charge et décharge) et le volume de chaque stockage, PHS et P2G.

$$
\begin{aligned}
phs_{in,h} &\leqslant phs_{power} & ptg_{in,h} &\leqslant ptg_{power,in} \\
phs_{out,h} &\leqslant phs_{power} & ptg_{out,h} &\leqslant ptg_{power,out} \\
phs_{level,h} &\leqslant phs_{capacity} & ptg_{level,h} &\leqslant ptg_{capacity}
\end{aligned}
$$

pour $h = 1, \ldots, T$, avec $T = 8760$.

Équilibre offre–demande

Écrire, à chaque heure, l'inégalité assurant que ce qui est produit et déstocké (complété par le déficit si besoin) couvre la demande et la charge des stockages.

Équilibre offre–demande

Écrire, à chaque heure, l'inégalité assurant que ce qui est produit et déstocké (complété par le déficit si besoin) couvre la demande et la charge des stockages.

$$prod_h + phs_{out,h} + ptg_{out,h} - phs_{in,h} - ptg_{in,h} + deficit_h \geqslant demand_h,$$

$$\text{pour } h = 1, \ldots, T, \text{ avec } T = 8760.$$

Pas de rendement ici : les pertes sont entièrement portées par la récurrence du stock (convention choisie).

Évolution des stocks

Relier le niveau de chaque stock à l'heure h à son niveau à l'heure précédente, selon ce qui a été chargé et déchargé entre les deux.

Évolution des stocks

Relier le niveau de chaque stock à l'heure h à son niveau à l'heure précédente, selon ce qui a été chargé et déchargé entre les deux.

$$
\begin{aligned}
phs_{level,h} &= phs_{level,h-1} + \eta_{phs} \times phs_{in,h} - phs_{out,h} \\
ptg_{level,h} &= ptg_{level,h-1} + \eta_{ptg} \times ptg_{in,h} - ptg_{out,h}
\end{aligned}
$$

pour $h = 1, \ldots, T$, avec $T = 8760$ (et $phs_{level,0}$, $ptg_{level,0}$ donnés).

✍ **Convention différente d'EOLES :** ici, η est le rendement **aller-retour complet**, appliqué en une fois **à la charge**, dans la récurrence. Dans EOLES, η^{in} et η^{out} sont séparés et portés par le bilan offre-demande, pas par la récurrence : les deux écritures sont correctes mais ne définissent pas la même variable de stock (cohérence vérifiée : $\eta^{in} \times \eta^{out} = 0{,}9 \times 0{,}85 = 76{,}5\,\%$ pour le PHS, proche des 75 % utilisés ici).

Initialisation

Fixer le niveau initial de chaque stock, à $h = 0$.

Initialisation

Fixer le niveau initial de chaque stock, à $h = 0$.

$$phs_{level,0} = phs_{capacity}/2, \qquad ptg_{level,0} = ptg_{capacity}$$

✍ **Deux stocks, deux dynamiques :** le court terme démarre à mi-remplissage (recharge rapide), le long terme plein (recharge saisonnière). La cyclicité annuelle ($ptg_{level,T} = ptg_{level,0}$) est encouragée par l'objectif, pas imposée.

Un modèle simplifié du modèle EOLES

Le problème d'optimisation complet

$$\min \ \alpha \sum_{h=1}^{T} deficit_h \ - \ ptg_{level,T}$$

sous les contraintes, pour $h = 1, \ldots, T$ **(avec** $T = 8760$**)** :

- **Équilibre offre–demande** :

$$prod_h + phs_{out,h} + ptg_{out,h} - phs_{in,h} - ptg_{in,h} + deficit_h \ \geqslant \ demand_h$$

- **Évolution des stocks** :

$$\begin{aligned} phs_{level,h} &= phs_{level,h-1} + \eta_{phs}\, phs_{in,h} - phs_{out,h} \\ ptg_{level,h} &= ptg_{level,h-1} + \eta_{ptg}\, ptg_{in,h} - ptg_{out,h} \end{aligned}$$

- **Contraintes techniques** :

$$\begin{aligned} phs_{in,h} &\leqslant phs_{power} & ptg_{in,h} &\leqslant ptg_{power,in} \\ phs_{out,h} &\leqslant phs_{power} & ptg_{out,h} &\leqslant ptg_{power,out} \\ phs_{level,h} &\leqslant phs_{capacity} & ptg_{level,h} &\leqslant ptg_{capacity} \end{aligned}$$

Initialisation :

$$phs_{level,0} = phs_{capacity}/2, \quad ptg_{level,0} = ptg_{capacity}$$

Le coefficient α n'est pas un détail technique

Effet d'horizon et valeur du stock terminal

$$\min \ \alpha \sum_{h=1}^{T} deficit_h \ - \ ptg_{level,T}$$

Pourquoi le second terme ? L'effet d'horizon

Le modèle s'arrête à $h = T$. Sans ce terme, l'optimum viderait tout le stock de gaz en décembre, sans pénalité. EOLES règle le problème en ajoutant une contrainte de cyclicité.

Que représente α ?

Un **taux d'échange** entre deux grandeurs différentes :

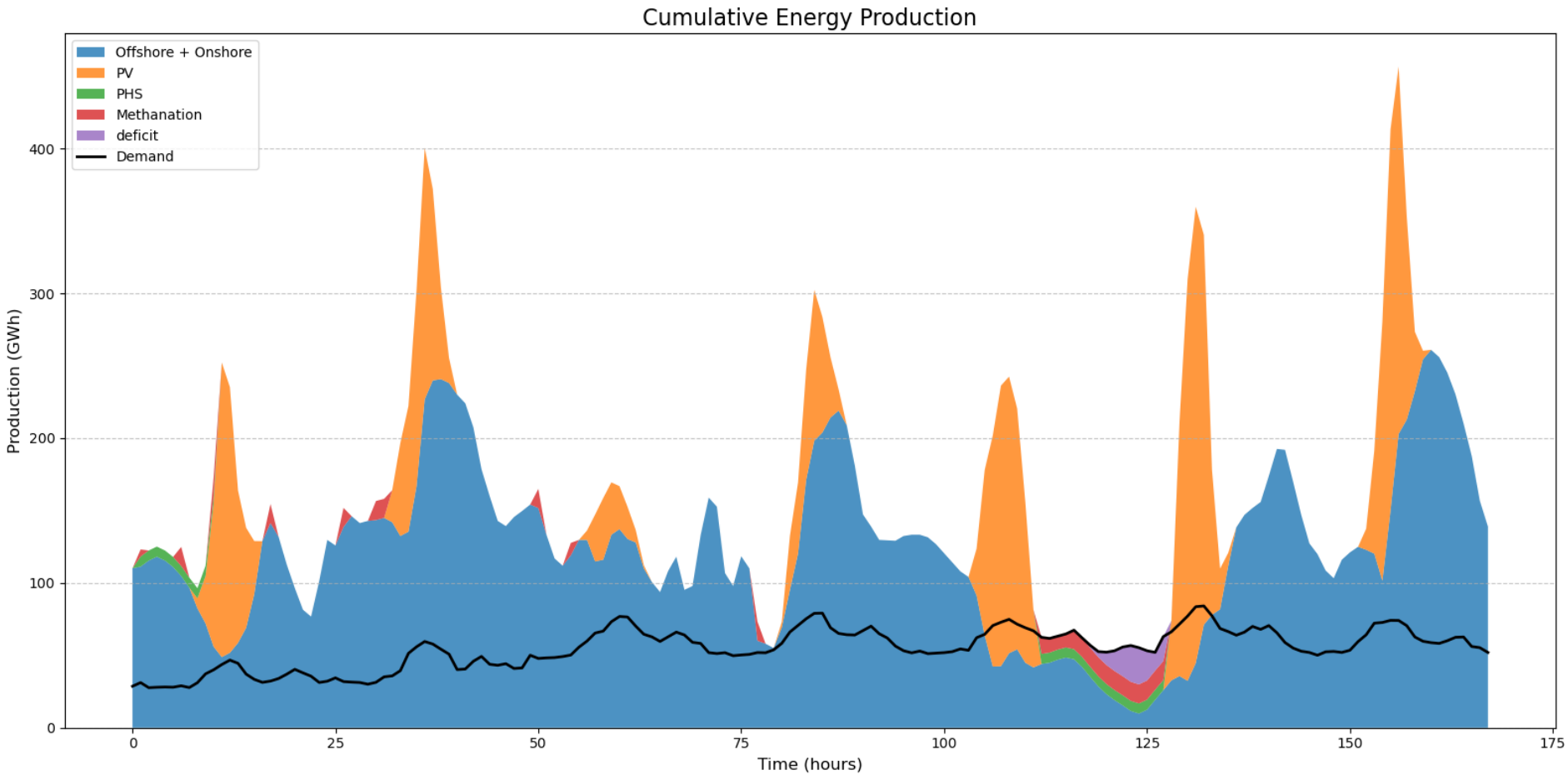
$$\underbrace{1 \text{ GWh de déficit}}_{\text{défaillance aujourd'hui}} \longleftrightarrow \underbrace{\alpha \text{ GWh de gaz en stock}}_{\text{sécurité l'an prochain}}$$

- α **grand** : aucune défaillance tolérée, stock vide en fin d'année.
- α **petit** : on préserve le gaz, quitte à subir des coupures.

Cet arbitrage *sécurité aujourd'hui / sécurité demain* est choisi par le modélisateur ; la dualité (séance 4) dira quelle valeur α devrait prendre.

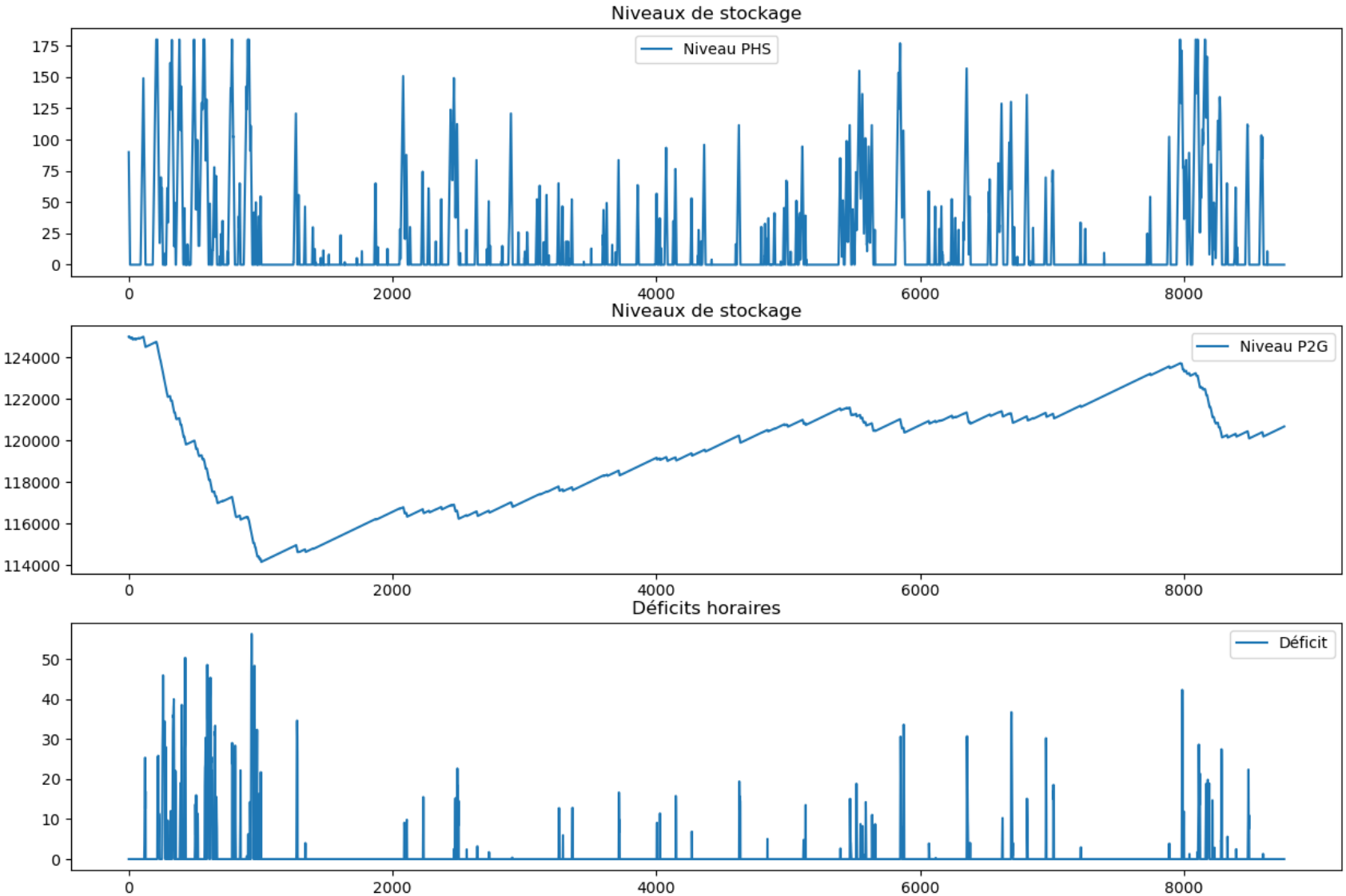
Un modèle simplifié du modèle EOLES

Premiers résultats - Sur la première semaine de janvier



Un modèle simplifié du modèle EOLES

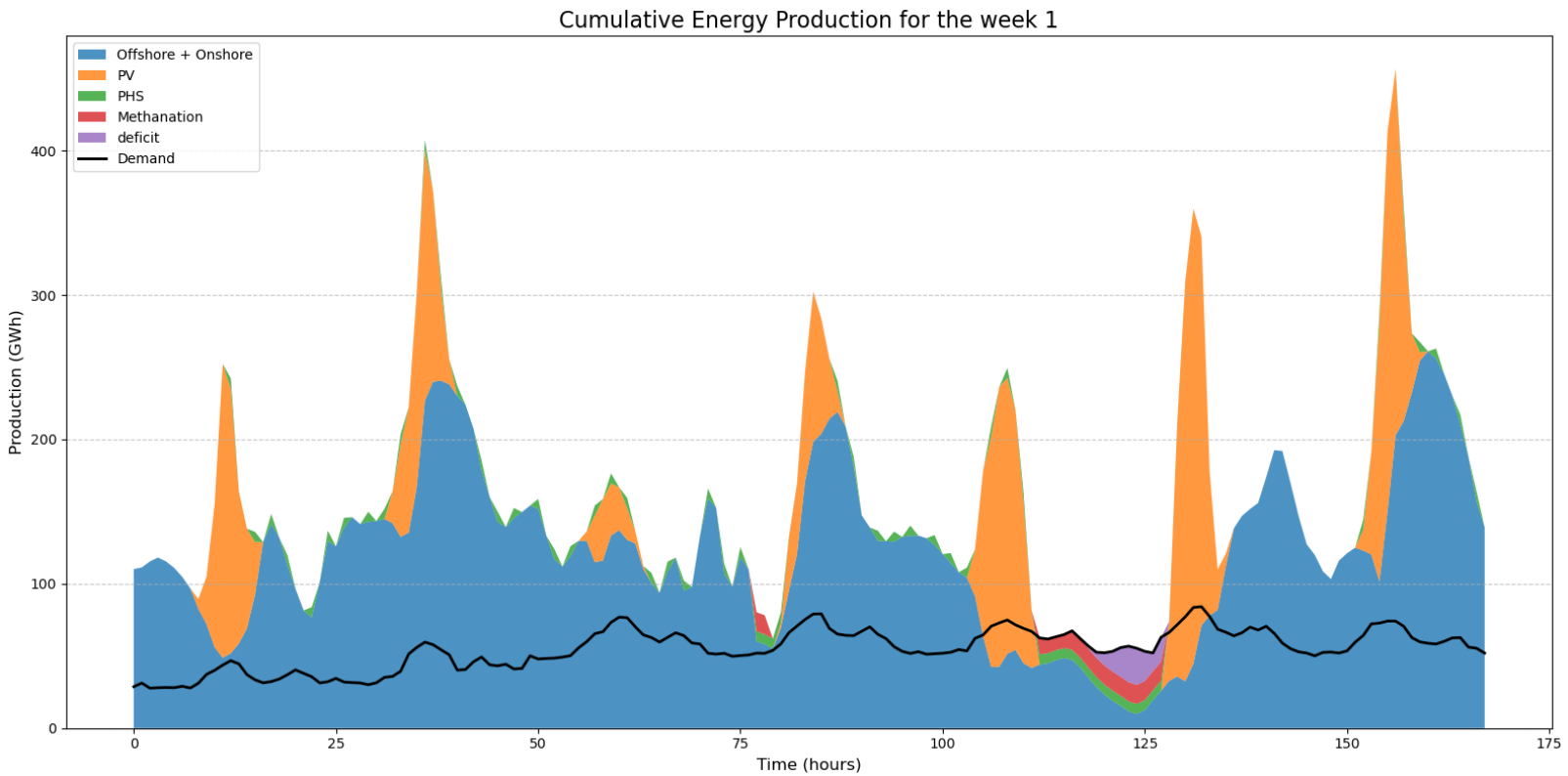
Premiers résultats - Stratégie de dispatch



Un modèle simplifié du modèle EOLES

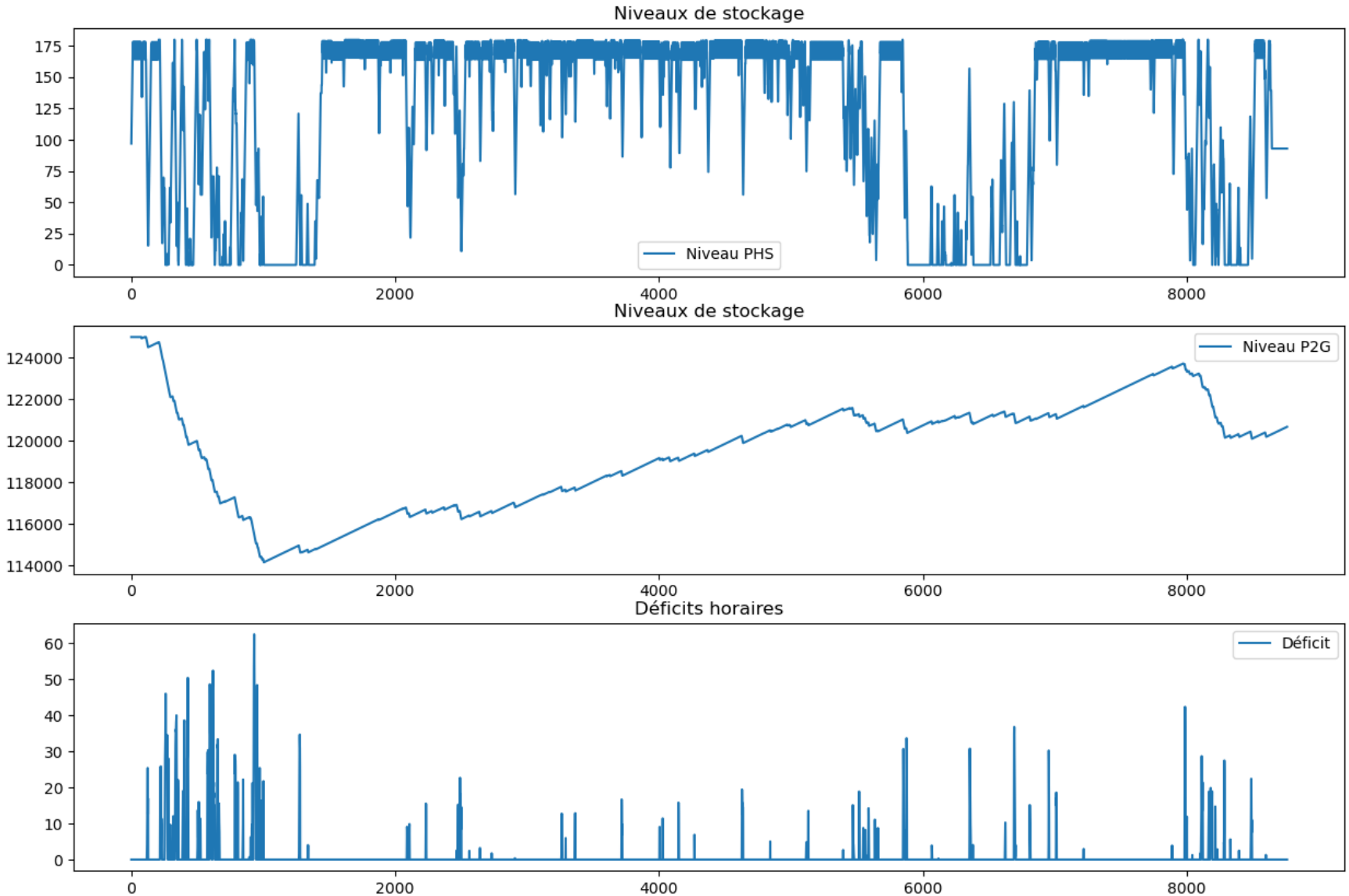
Une autre solution optimale (SDDP) - Sur la première semaine de janvier

SDDP (Stochastic Dual Dynamic Programming) : une autre méthode de résolution, plus adaptée à la gestion de l'incertitude météo/demande que la formulation LP déterministe vue précédemment.



Un modèle simplifié du modèle EOLES

Une autre solution optimale (SDDP)



Du modèle jouet au TP

Ce que vous allez faire

Dans le TP 2, vous allez implémenter et manipuler ce modèle jouet :

1. Formuler et résoudre le problème sur une semaine avec `scipy.linprog` (formulation matricielle $Ax \leq b$)
2. Passer à l'échelle de l'année complète (8760 heures) avec `PuLP`
3. Analyser la **sensibilité du système au stockage** : niveaux initiaux, capacités, rendements du PHS (court terme) et du P2G (long terme)

Le fil rouge

Vous retrouverez dans le compte-rendu les mêmes questions que celles posées ici en théorie : quel est le rôle respectif des deux stockages ? Quel compromis entre sécurité d'approvisionnement (déficits) et disponibilité du stockage pour l'année suivante ?

Partie 2

Programmation linéaire et algorithme du simplexe

De la modélisation à la résolution : formes canonique/standard, méthode des dictionnaires, dualité

2. Programmation linéaire : modélisation et résolution graphique
   - Modélisation
   - Formes canonique et standard
   - Résolution graphique
3. Algorithme du simplexe
   - Principe et exemple introductif
   - Formalisation générale
   - Cas particuliers et limites

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ ou } \max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^\top x$$
$$\text{sous} \quad Ax \leq b,\ Ex = F.$$

- A, b, c, E, F données du problème,
- $x \in \mathbb{R}^n$ variables de l'optimisation,
- $f(x) = c^\top x$ fonction coût, critère, objectif,
- $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax \leq b,\ Ex = F\}$ ensemble admissible/domaine des contraintes.

Réécriture

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ ou } \max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{sous} \quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \qquad e_{11}x_1 + \cdots + e_{1n}x_n = f_1,$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \qquad e_{p1}x_1 + \cdots + e_{pn}x_n = f_p.$$
$$\text{Contraintes d'inégalités} \qquad \text{Contraintes d'égalités}$$

en posant $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $F \in \mathbb{R}^p$, $E = (e_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Premiers exemples de modélisation

Problème des yaourts (1/2)

Un fabriquant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de fraises, de lait et de sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes :

	Yaourt A	Yaourt B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

Les matières premières sont en quantité limitée : 800 kilos de Fraises, 700 kilos de Lait et 300 kilos de sucre. La vente des yaourts A rapporte 4 euros par kilo et les yaourts B 5 euros. Ecrire le problème d'optimisation que le fabriquant doit résoudre pour maximiser son revenu.

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites
  - On parle de variables de l'optimisation, notées x_A et x_B.
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites
  - On parle de variables de l'optimisation, notées x_A et x_B.
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - Le profit z, calculé à partir de x_A et x_B
  - On parle de fonction objectif
  - Coût: $z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites
  - On parle de variables de l'optimisation, notées x_A et x_B.
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - Le profit z, calculé à partir de x_A et x_B
  - On parle de fonction objectif
  - Coût: $z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?
  - Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
  - la quantité utilisée dépend de la production : $2x_A + x_B$
  - $2x_A + x_B \leq 800$

Premiers exemples de modélisation

Problème des yaourts (2/2)

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites
  - On parle de variables de l'optimisation, notées x_A et x_B.
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - Le profit z, calculé à partir de x_A et x_B
  - On parle de fonction objectif
  - Coût: $z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?
  - Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
  - la quantité utilisée dépend de la production : $2x_A + x_B$
  - $2x_A + x_B \leq 800$

Le programme linéaire obtenu

$$\max_{x_A, x_B} \; z = 4x_A + 5x_B \quad \text{sous} \quad \begin{aligned} 2x_A + x_B &\leq 800 && \text{(fraises)} \\ x_A + 2x_B &\leq 700 && \text{(lait)} \\ x_B &\leq 300 && \text{(sucre)} \\ x_A,\; x_B &\geq 0 && \text{positivité !} \end{aligned}$$

Tout problème de programmation linéaire peut s'écrire de façon équivalente sous des formes différentes:

- Forme canonique: $\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x$ sous $Ax \leq b,\ x \geqslant 0$.
- Forme standard: $\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x$ sous $Ax = b,\ x \geqslant 0$.

Et si on veut maximiser ?

$$\max_{Ax\leq b,\ Ex=F} \left(c^\top x\right) = - \min_{Ax\leq b,\ Ex=F} \left(-c^\top x\right).$$

Même ensemble de solutions, valeurs optimales opposées.

Exercice.

1. Mettre sous forme canonique : $\min_{x_1,x_2} x_1 - x_2$ sous $x_1 + 2x_2 = 6,\ x_1, x_2 \geqslant 0$.
2. Mettre sous forme standard : $\min_{x_1,x_2} 3x_1 + 2x_2$ sous $x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geqslant 0$.

Exercice.

1. Mettre sous forme canonique : $\min\limits_{x_1, x_2} x_1 - x_2$ sous $x_1 + 2x_2 = 6,\ x_1, x_2 \geqslant 0$.

2. Mettre sous forme standard : $\min\limits_{x_1, x_2} 3x_1 + 2x_2$ sous $x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geqslant 0$.

Quelques ingrédients pour la reformulation:

- Passer des contraintes d'égalité aux inégalités:

$$Ex = F \Leftrightarrow Ex \leqslant F,\ (-E)x \leqslant -F.$$

- Passer des contraintes d'inégalité aux contraintes d'égalité grâce aux **variables d'écart** $s_i \geqslant 0$:

$$Ax \leqslant b \Leftrightarrow \forall i, a_i^\top x + s_i = b_i,\ s_i \geqslant 0.$$

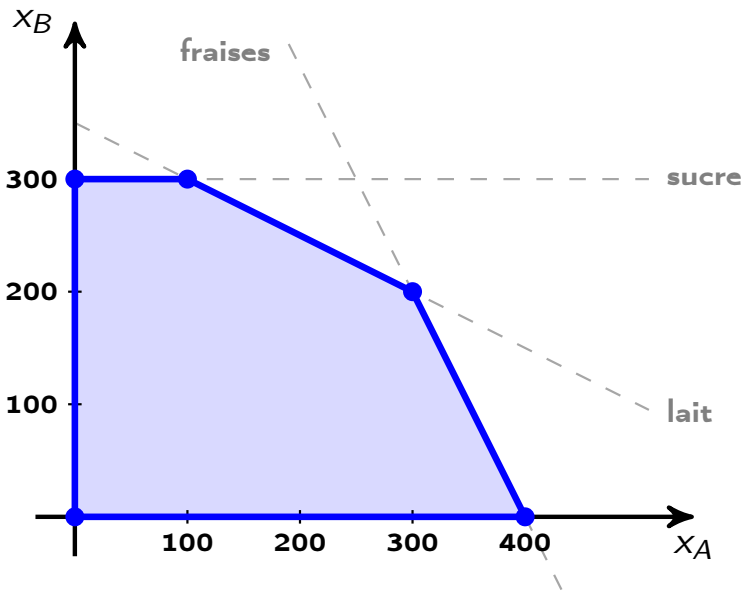
- Se ramener à des variables de l'optimisation positives: on pose $x = x^+ - x^-$ avec

$$\begin{aligned} x^+ &= \max(x, 0) \geqslant 0 \\ x^- &= -\min(x, 0) \geqslant 0 \end{aligned}$$

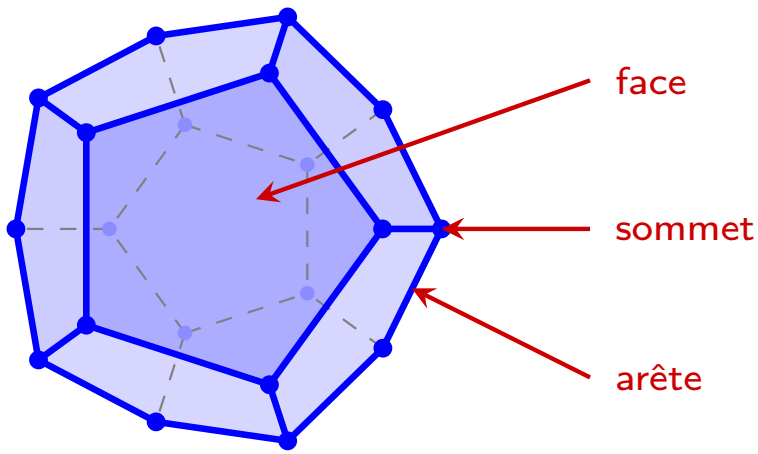
↪ Exemple général (avec matrices) : voir en annexe

Résolution graphique d'un problème de PL

Géométrie du domaine des contraintes



En dimension 2 : un polygone.



En dimension 3 : un polyèdre.

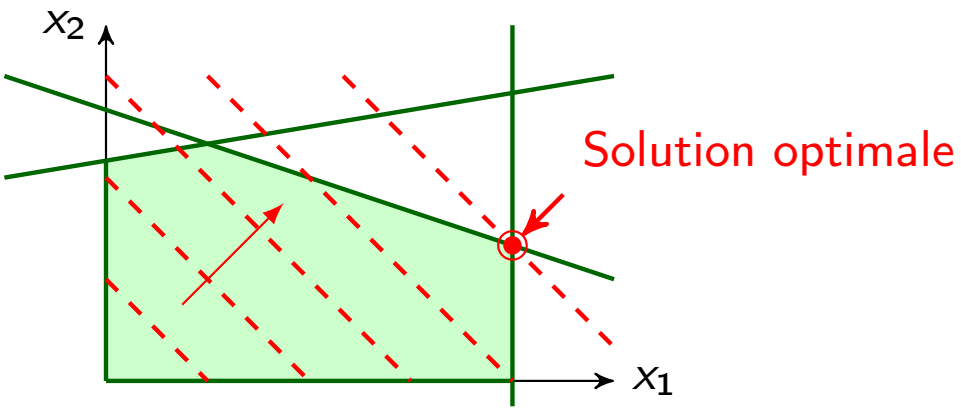
$X = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax \leq b, \ x \geqslant 0\}$ est un **polyèdre convexe** de $\mathbb{R}^n$: intersection des demi-espaces définis par les contraintes et des conditions de positivité.

Résolution graphique d'un problème de PL

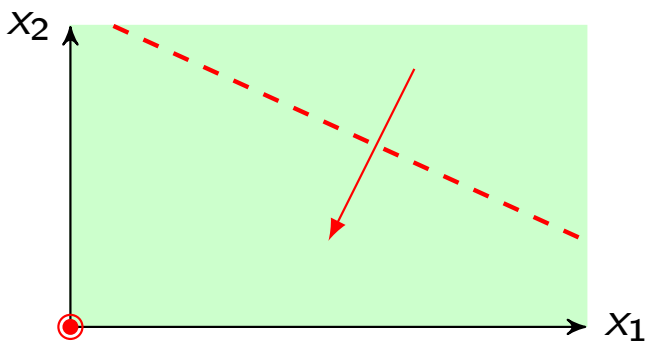
Principe général sur un exemple

$$(P_L) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{sous} \quad x \in X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geqslant 0\}.$$

On trace les droites isocritères $z = c^\top x = C^{ste}$ et on balaye l'ensemble des solutions admissibles.



Cas X borné



Cas X non borné

Exercice: résoudre graphiquement le problème:

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} y - x \quad \text{sous} \quad x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Résolution graphique d'un problème de PL

Exercice

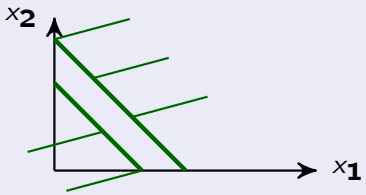
Exercice: résoudre graphiquement le problème:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} y - x \quad \text{sous} \quad x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

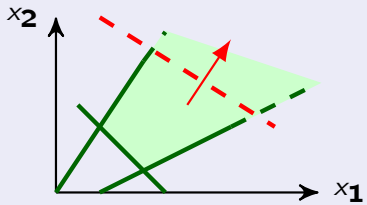
Existence de solutions en PL

Les cas possibles, illustrés graphiquement

Aucune solution optimale

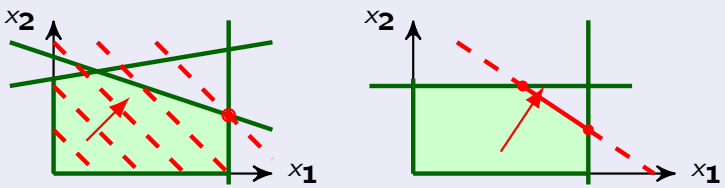


Infaisable : $X = \emptyset$.

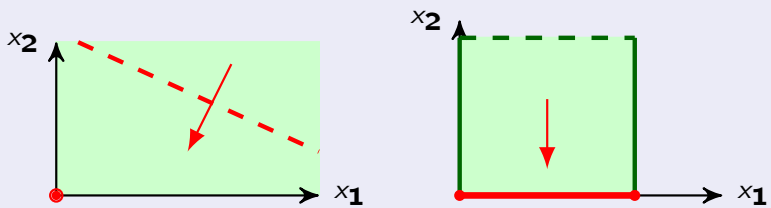


Non borné : le coût décroît indéfiniment vers $-\infty$.

Solution optimale (unique ou en infinité)



X **borné** : solution unique (à gauche) ou infinité de solutions le long d'une arête/face (à droite).



X **non borné** : optimum atteint si le cout est borné, unique (à gauche) ou en infinité (à droite).

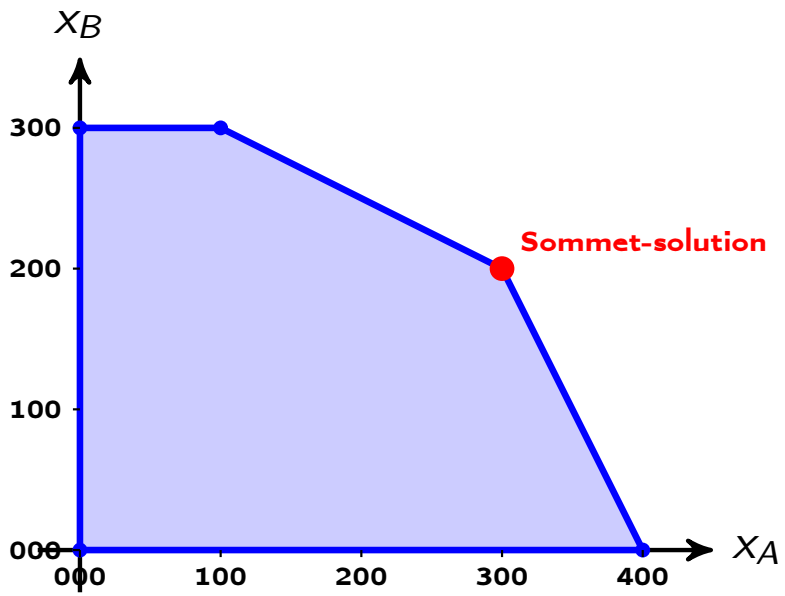
Proposition (Existence d'une solution-sommet)

Si le problème (P_L) admet une solution, alors il admet au moins une solution en un sommet de l'ensemble admissible X.

Résolution graphique

Quand on a la liste des sommets du polyèdre des contraintes...

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_A + 5x_B \\ & 2x_A + x_B \leq 800 \\ & x_A + 2x_B \leq 700 \\ & x_B \leq 300 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$



Parcourons tous les sommets du polyèdre des contraintes :

- $(0, 0)$: $z = 0$
- $(0, 300)$: $z = 1500$
- $(100, 300)$: $z = 1900$
- $(300, 200)$: $z = 2200$
- $(400, 0)$: $z = 1600$

Solution optimale : $(300, 200)$

↪ Oui mais.... en grande dimension, il peut y avoir beaucoup de sommets et il est donc exclu de les explorer tous !

Comment résoudre un problème de programmation linéaire ?

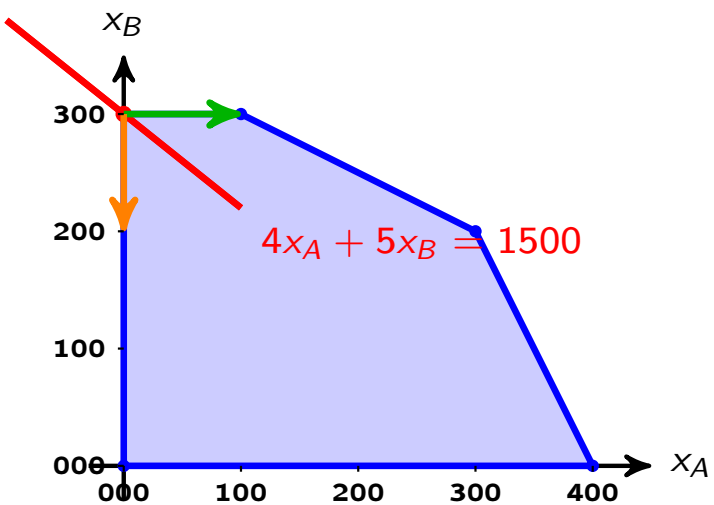
L'idée du simplexe (Dantzig 1947)

$$(P_L) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{sous} \quad Ax = b,\ x \geqslant 0.$$

Intuition: se déplacer de sommet en sommet du polyèdre des contraintes de manière à faire décroitre $f(x) = c^\top x$ jusqu'à ce que l'on trouve une solution-sommet.

Illustration sur le problème des yaourts : maximiser $z = 4x_A + 5x_B$ sous contrainte:

1. Partir d'un point extrême (sommet) du domaine réalisable.
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente:
   - $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4 > 0$
   - $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = -5 < 0$



Comment résoudre un problème de programmation linéaire ?

L'idée du simplexe (Dantzig 1947)

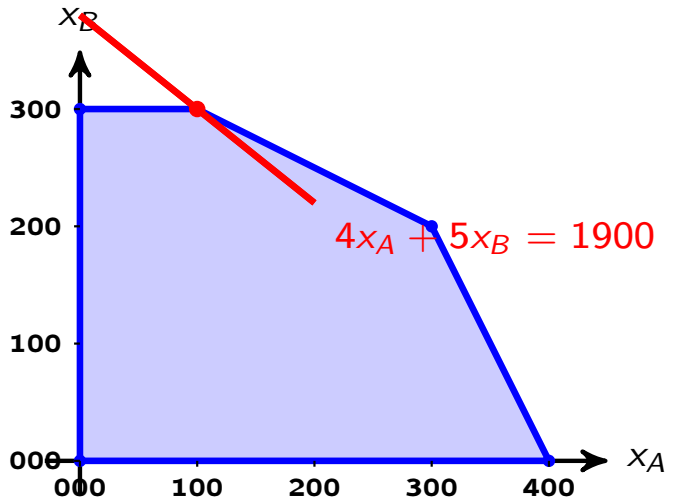
$$(P_L) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{sous} \quad Ax = b,\ x \geqslant 0.$$

Intuition: se déplacer de sommet en sommet du polyèdre des contraintes de manière à faire décroitre $f(x) = c^\top x$ jusqu'à ce que l'on trouve une solution-sommet.

Illustration sur le problème des yaourts : maximiser $z = 4x_A + 5x_B$ sous contrainte:

1. Partir d'un point extrême (sommet) du domaine réalisable.
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente:
   - $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4 > 0$
   - $\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = -5 < 0$

   Direction retenue pour maximiser: $(1, 0)$.



1. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au sommet suivant. S'il n'y en a pas, le problème est non borné, STOP. Sinon, poser $x \leftarrow y$ et revenir en 2.

La méthode des dictionnaires

Le dictionnaire initial : le vocabulaire, une fois pour toutes

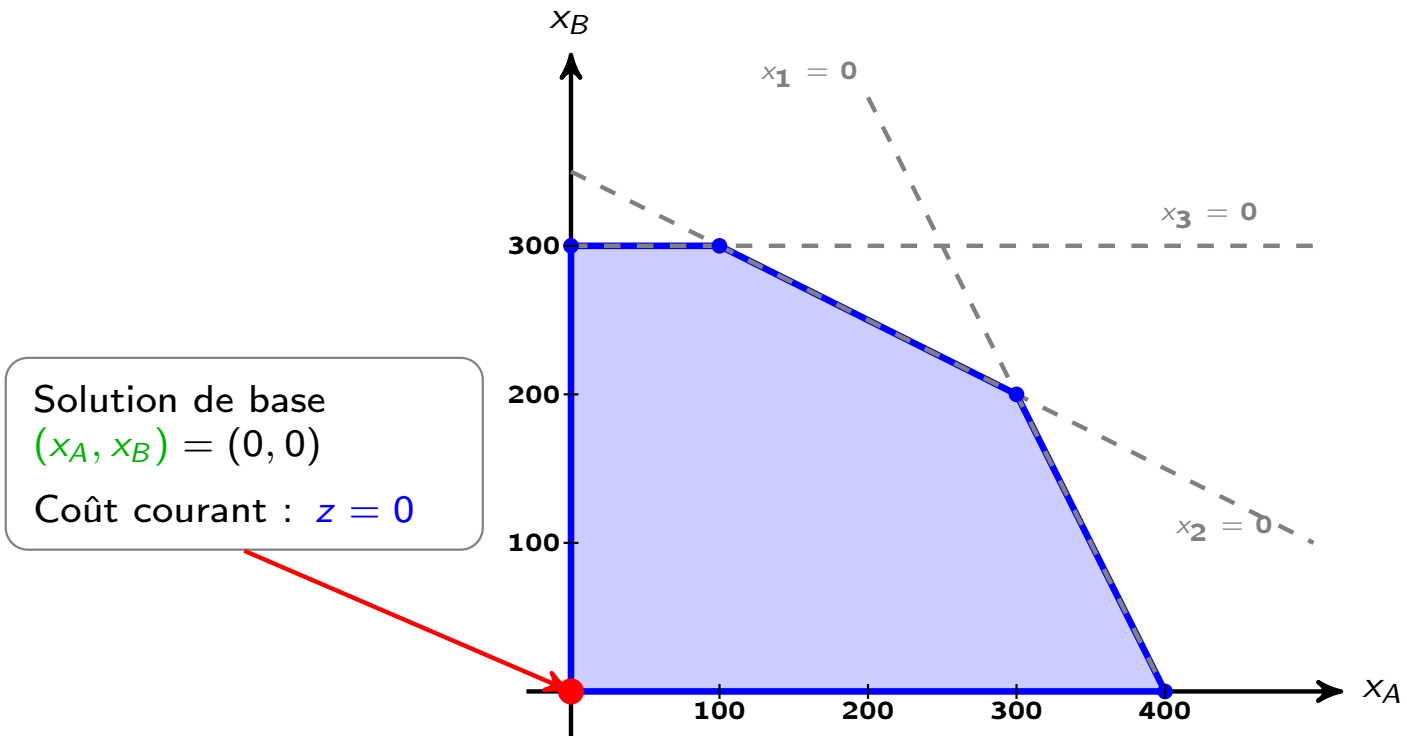
Reprenons le problème des yaourts et exprimons l'objectif et les variables d'écart x_1, x_2, x_3 (les kilos de fraise, lait, sucre non utilisés) en fonction des autres variables :

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{Max } z = & 0 & + & 4x_A & + & 5x_B \\ x_1 = & 800 & - & 2x_A & - & x_B \\ x_2 = & 700 & - & x_A & - & 2x_B \\ x_3 = & 300 & & & - & x_B \end{array}$$

- Ce système s'appelle un dictionnaire.
- $x_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3)$: variables de base. $x_{\mathcal{N}} = (x_A, x_B)$: variables hors-base.
- Solution de base: on pose $x_{\mathcal{N}} = 0$, d'où $x_1 = 800,\ x_2 = 700,\ x_3 = 300$. Elle est **réalisable** car $x_{\mathcal{B}} \geqslant 0$.
- Valeur courante : $z = 0$.
- Les coefficients 4 et 5 devant x_A, x_B sont les coûts réduits : l'impact *unitaire* sur z.

La méthode des dictionnaires

Le dictionnaire initial : lecture géométrique



x_i est la **marge** restante sur la contrainte i :

$x_1 = 800 - 2x_A - x_B$ représente les kilos de fraises non utilisés

- $x_1 = 0$ signifie que le stock de fraises est épuisé, on est sur une arête.
- Si 2 variables s'annulent, on est sur un sommet.

Itération 1 (1/3)

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = \quad & 0 \quad + \quad 4x_A \quad + \quad 5x_B \\
x_1 = \quad & 800 \quad - \quad 2x_A \quad - \quad x_B \\
x_2 = \quad & 700 \quad - \quad x_A \quad - \quad 2x_B \\
x_3 = \quad & 300 \quad - \quad x_B
\end{aligned}
$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(a) Test d'optimalité. Existe-t-il un coût réduit > 0 ? Oui.

$\Rightarrow$ On peut encore augmenter z, on n'est pas à l'optimum.

Itération 1 (1/3)

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = \quad & 0 \quad + \quad 4x_A \quad + \quad 5x_B \\
x_1 = \quad & 800 \quad - \quad 2x_A \quad - \quad x_B \\
x_2 = \quad & 700 \quad - \quad x_A \quad - \quad 2x_B \\
x_3 = \quad & 300 \quad - \quad x_B
\end{aligned}
$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(a) Test d'optimalité. Existe-t-il un coût réduit > 0 ? Oui.

$\Rightarrow$ On peut encore augmenter z, on n'est pas à l'optimum.

(b) Choix de la variable entrante. On a le choix entre x_A et x_B

- Si $+1$ sur x_A, alors z augmente de 4
- Si $+1$ sur x_B alors z augmente de 5

Itération 1 (1/3)

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z = \quad & 0 + 4x_A + 5x_B \\
x_1 = \quad & 800 - 2x_A - x_B \\
x_2 = \quad & 700 - x_A - 2x_B \\
x_3 = \quad & 300 - x_B
\end{aligned}
$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(a) Test d'optimalité. Existe-t-il un coût réduit > 0 ? Oui.

$\Rightarrow$ On peut encore augmenter z, on n'est pas à l'optimum.

(b) Choix de la variable entrante. On a le choix entre x_A et x_B

- Si $+1$ sur x_A, alors z augmente de 4
- Si $+1$ sur x_B alors z augmente de 5

On peut utiliser par ex la **règle de Dantzig** (le plus grand coût réduit).

x_B entre dans la base.

Itération 1 (2/3)

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 0 \quad + \quad 4x_A \quad + \quad 5x_B \\ x_1 = \quad & 800 \quad - \quad 2x_A \quad - \quad x_B \\ x_2 = \quad & 700 \quad - \quad x_A \quad - \quad 2x_B \\ x_3 = \quad & 300 \quad - \quad x_B \end{aligned}$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(c) Choix de la variable sortante. Jusqu'où augmenter x_B (avec $x_A = 0$) sans violer $x_{\mathcal{B}} \geqslant 0$?

$$\begin{aligned} x_1 = 800 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 800 \\ x_2 = 700 - 2x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 350 \\ x_3 = 300 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 300 \end{aligned}$$

Itération 1 (2/3)

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 0 + 4x_A + 5x_B \\ x_1 = \quad & 800 - 2x_A - x_B \\ x_2 = \quad & 700 - x_A - 2x_B \\ x_3 = \quad & 300 - x_B \end{aligned}$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(c) Choix de la variable sortante. Jusqu'où augmenter x_B (avec $x_A = 0$) sans violer $x_{\mathcal{B}} \geqslant 0$?

$$\begin{aligned} x_1 = 800 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 800 \\ x_2 = 700 - 2x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 350 \\ x_3 = 300 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 300 \quad \longleftarrow \text{ la plus contraignante} \end{aligned}$$

Donc $x_B = 300$, et c'est x_3 qui s'annule : x_3 **sort** de la base.

Itération 1 (2/3)

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 0 \quad + \quad 4x_A \quad + \quad 5x_B \\ x_1 = \quad & 800 \quad - \quad 2x_A \quad - \quad x_B \\ x_2 = \quad & 700 \quad - \quad x_A \quad - \quad 2x_B \\ x_3 = \quad & 300 \quad - \quad x_B \end{aligned}$$

Variables de base : x_1, x_2, x_3 **Variables hors base** (valeur 0) : x_A, x_B

(c) Choix de la variable sortante. Jusqu'où augmenter x_B (avec $x_A = 0$) sans violer $x_{\mathcal{B}} \geqslant 0$?

$$\begin{aligned} x_1 = 800 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 800 \\ x_2 = 700 - 2x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 350 \\ x_3 = 300 - x_B \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_B \leq 300 \quad \longleftarrow \text{ la plus contraignante} \end{aligned}$$

Donc $x_B = 300$, et c'est x_3 qui s'annule : x_3 **sort** de la base.

(d) Mise à jour de la base : x_3 sort, x_B entre.

$$x_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_B), \qquad x_{\mathcal{N}} = (x_A, x_3).$$

Itération 1 (3/3) : le pivotage

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 0 \quad + \quad 4x_A \quad + \quad 5x_B \\ x_1 = \quad & 800 \quad - \quad 2x_A \quad - \quad x_B \\ x_2 = \quad & 700 \quad - \quad x_A \quad - \quad 2x_B \\ x_3 = \quad & 300 \quad - \quad x_B \end{aligned}$$

(e) Pivotage : réécrire tout le dictionnaire en fonction des *nouvelles* variables hors-base:

$$x_{\mathcal{N}} = (x_A, x_3).$$

On isole la ligne pivot, $x_3 = 300 - x_B$, soit $x_B = 300 - x_3$, puis on substitue partout :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 1500 \quad + \quad 4x_A \quad - \quad 5x_3 \\ x_1 = \quad & 500 \quad - \quad 2x_A \quad + \quad x_3 \\ x_2 = \quad & 100 \quad - \quad x_A \quad + \quad 2x_3 \\ x_B = \quad & 300 \quad - \quad x_3 \end{aligned}$$

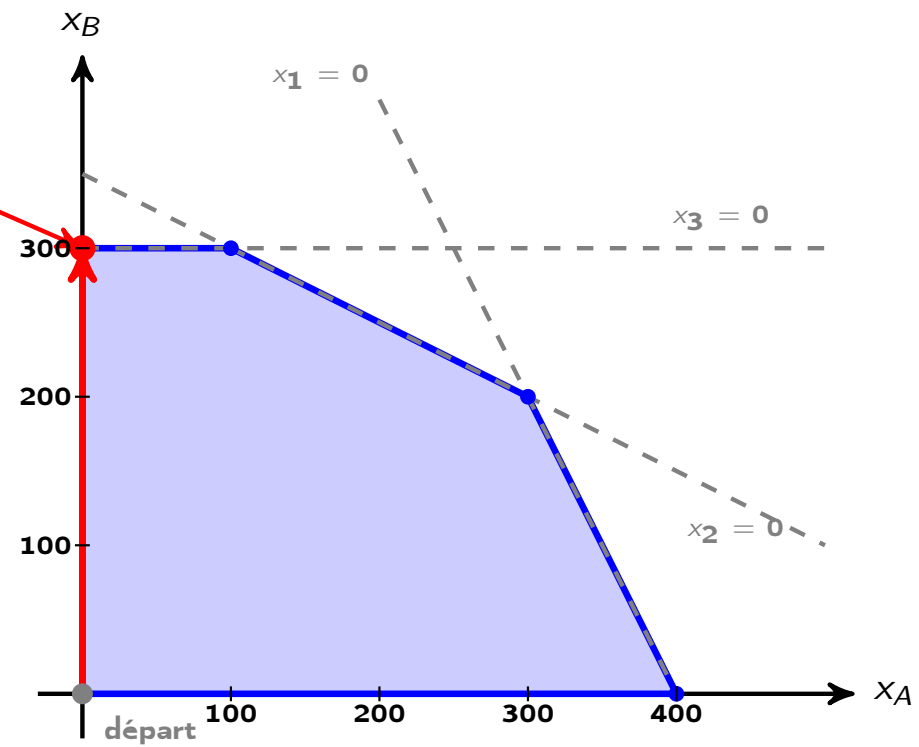
Solution de base associée : $(x_A, x_B, x_1, x_2, x_3) = (0, 300, 500, 100, 0)$, $z = 1500$.

↪ On a changé de sommet : de $(0, 0)$ à $(0, 300)$. Le dictionnaire est de nouveau réalisable ($x_{\mathcal{B}} \geqslant 0$), et on peut recommencer en (a).

Itération 1 : on a changé de sommet

Nouvelle solution
$(x_A, x_B) = (0, 300)$

Coût courant : $z = 1500$



On s'est déplacé le long d'une arête du polygone, du sommet $(0, 0)$ vers le sommet adjacent $(0, 300)$: c'est ce que fait **chaque itération** du simplexe.

À vous : terminez la résolution

La recette, à répéter jusqu'à l'arrêt

(a) **Test d'optimalité** : s'il n'y a plus aucun coût réduit > 0, **STOP**, la solution courante est optimale.

(b) **Entrante** : choisir une variable hors-base de coût réduit > 0 (le plus grand : Dantzig).

(c) **Sortante** : test du ratio – écrire $x_i \geqslant 0$ pour chaque ligne, garder la borne la plus contraignante.

(d,e) **Pivotage** : échanger les deux variables et réécrire le dictionnaire.

Point de départ : le dictionnaire obtenu à l'itération 1.

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 1500 + 4x_A - 5x_3 \\ x_1 = \quad & 500 - 2x_A + x_3 \\ x_2 = \quad & 100 - x_A + 2x_3 \\ x_B = \quad & 300 - x_3 \end{aligned}$$

Itér.	Entrante	Sortante	Valeur entrante	Point (x_A, x_B)	z
1	x_B	x_3	300	$(0, 300)$	1500
2					
3					
4					

Correction – Itération 2

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1500 + 4x_A - 5x_3 \\ x_1 &= 500 - 2x_A + x_3 \\ x_2 &= 100 - x_A + 2x_3 \\ x_B &= 300 - x_3 \end{aligned}$$

(a) Un coût réduit est > 0 (celui de x_A) : on continue.

(b) **Entrante** : x_A, seule candidate (x_3 a un coût réduit $-5 < 0$).

(c) **Test du ratio** (avec $x_3 = 0$) :

$$\begin{aligned} x_1 = 500 - 2x_A \geq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x_A \leq 250 \\ x_2 = 100 - x_A \geq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x_A \leq 100 \quad \longleftarrow \\ x_B = 300 &\quad\text{ne dépend pas de } x_A \end{aligned}$$

Donc $x_A = 100$ et x_2 sort de la base.

(d,e) **Pivotage** avec $x_{\mathcal{B}} = (x_1, x_A, x_B)$, $x_{\mathcal{N}} = (x_2, x_3)$, via $x_A = 100 - x_2 + 2x_3$:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1900 - 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 &= 300 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_A &= 100 - x_2 + 2x_3 \\ x_B &= 300 - x_3 \end{aligned}$$

Correction – Itération 3

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1900 - 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 &= 300 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_A &= 100 - x_2 + 2x_3 \\ x_B &= 300 - x_3 \end{aligned}$$

(a) Un coût réduit est > 0 (celui de x_3) : on continue.

(b) **Entrante** : x_3, seule candidate (x_2 a un coût réduit $-4 < 0$).

(c) **Test du ratio** (avec $x_2 = 0$) :

$$\begin{aligned} x_1 = 300 - 3x_3 \geq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x_3 \leq 100 \quad \longleftarrow \\ x_A = 100 + 2x_3 \geq 0 &\quad\quad\quad \text{aucune contrainte} \\ x_B = 300 - x_3 \geq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x_3 \leq 300 \end{aligned}$$

Donc $x_3 = 100$ et x_1 sort de la base.

(d,e) **Pivotage** via $3x_3 = 300 - x_1 + 2x_2$:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2200 - 2x_2 - x_1 \\ x_3 &= 100 + \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_1 \\ x_A &= 300 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_1 \\ x_B &= 200 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_1 \end{aligned}$$

Test d'optimalité et solution optimale

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 2200 \quad - \quad 2x_2 \quad - \quad x_1 \\ x_3 = \quad & 100 \quad + \quad \tfrac{2}{3}x_2 \quad - \quad \tfrac{1}{3}x_1 \\ x_A = \quad & 300 \quad + \quad \tfrac{1}{3}x_2 \quad - \quad \tfrac{2}{3}x_1 \\ x_B = \quad & 200 \quad - \quad \tfrac{2}{3}x_2 \quad + \quad \tfrac{1}{3}x_1 \end{aligned}$$

(a) Test d'optimalité : tous les coûts réduits sont $\leqslant 0$ (-2 et -1). **STOP.**

Solution optimale

$$x_A = 300, \quad x_B = 200, \qquad \text{avec } x_3 = 100,\ x_1 = x_2 = 0, \quad z^\star = 2200.$$

Lecture : les contraintes 1 et 2 sont **saturées** ($x_1 = x_2 = 0$), la contrainte 3 ne l'est pas ($x_3 = 100$, il reste 100 unités de marge).

Bilan : quatre dictionnaires, quatre sommets

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 0 + 4x_A + 5x_B \\
x_1 &= 800 - 2x_A - x_B \\
x_2 &= 700 - x_A - 2x_B \\
x_3 &= 300 - x_B
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ x_B entre, x_3 sort

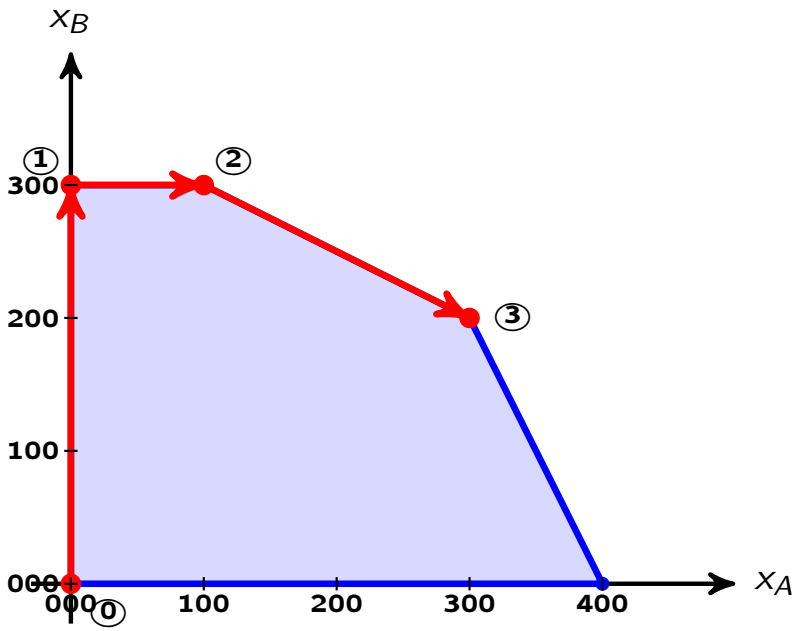
$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 1500 + 4x_A - 5x_3 \\
x_1 &= 500 - 2x_A + x_3 \\
x_2 &= 100 - x_A + 2x_3 \\
x_B &= 300 - x_3
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ x_A entre, x_2 sort

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 1900 - 4x_2 + 3x_3 \\
x_1 &= 300 + 2x_2 - 3x_3 \\
x_A &= 100 - x_2 + 2x_3 \\
x_B &= 300 - x_3
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ x_3 entre, x_1 sort

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 2200 - 2x_2 - x_1 \\
x_3 &= 100 + \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_1 \\
x_A &= 300 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_1 \\
x_B &= 200 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_1
\end{aligned}
$$



Un pivotage = une arête parcourue.

Chaque dictionnaire décrit *le même* polyèdre, vu depuis un sommet différent.

z croît strictement à chaque itération : ⓪ 0 → ① 1500 → ② 1900 → ③ 2200. C'est ce qui garantira la terminaison.

Bonus : et si on n'avait pas suivi Dantzig ?

A l'itération 1, la règle de Dantzig faisait entrer x_B. **Refaites la résolution en faisant entrer x_A à la place.** Combien d'itérations ?

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 0 + 4x_A + 5x_B \\ x_1 = \quad & 800 - 2x_A - x_B \\ x_2 = \quad & 700 - x_A - 2x_B \\ x_3 = \quad & 300 - x_B \end{aligned}$$

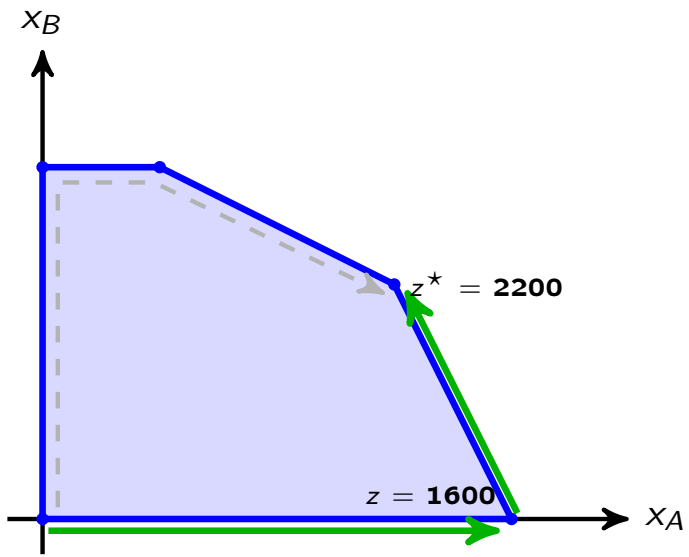
$\downarrow$ x_A entre, x_1 sort

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 1600 - 2x_1 + 3x_B \\ x_A = \quad & 400 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_B \\ x_2 = \quad & 300 + \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_B \\ x_3 = \quad & 300 - x_B \end{aligned}$$

$\downarrow$ x_B entre $(x_B \leq 800, 200, 300)$, x_2 sort

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & 2200 - x_1 - 2x_2 \\ x_A = \quad & 300 - \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \\ x_B = \quad & 200 + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 \\ x_3 = \quad & 100 - \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 \end{aligned}$$

Tous les coûts réduits sont $\leqslant 0$: **STOP**.



— sans Dantzig : 2 pivots - - - Dantzig : 3 pivots

Le coût réduit est une information **locale** : il dit le gain par unité, pas la longueur du pas ni le nombre de pivots restants.

Récapitulatif : l'algorithme du simplexe, cas général

1. **Dictionnaire** :

$$\begin{aligned} z &= \overline{z} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{c}_j x_j \\ x_i &= \overline{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{a}_{i,j} x_j \quad (i \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

2. **Test d'optimalité** : si tous les coûts réduits $\overline{c}_j \leqslant 0$, **STOP** : la solution de base courante est optimale.
3. **Variable entrante** : sinon, on choisit x_j une variable de coût réduit $\overline{c}_j < 0$.
4. **Variable sortante** : test du ratio – on augmente x_j jusqu'à ce qu'une variable de base s'annule.
5. **Pivotage** : on réécrit le dictionnaire pour la nouvelle base, et on retourne en 2.

↪ Formulation générale complète (notations, réalisabilité, dégénérescence) : voir en annexe

Et si un coût réduit est nul ?

On s'arrête quand tous les coûts réduits sont $\leqslant 0$. Que se passe-t-il pour un $\overline{c}_j$ exactement nul ?

- Faire entrer cette variable x_j ne fait **pas** bouger z : on se déplace vers un autre point de *même* valeur optimale.
- L'optimum n'est donc pas unique : deux solutions optimales $\Rightarrow$ **tout le segment qui les joint** est optimal. On n'a plus un sommet optimal, mais toute une face/arête.

Retour au modèle jouet

LP et SDDP donnaient le **même déficit total** et le **même stock final** – donc la même valeur optimale – mais **deux pilotages du PHS différents**: à certaines heures, stocker maintenant ou une heure plus tard coûte *rigoureusement* la même chose.

Deux pilotages différents peuvent être également optimaux :
c'est la valeur optimale qui est unique, pas la solution.

Est-ce que ça s'arrête ? Et en combien de temps ?

Ça s'arrête. À chaque pivotage, z augmente *strictement* : on ne repasse donc jamais par un sommet déjà visité, et il y en a un nombre fini.

L'exception. Quand un pivotage ne fait pas bouger z (pivot *dégénéré*), l'algorithme peut tourner en rond. C'est rare, et des règles de pivotage l'évitent (Bland, 1977). *Exemple en annexe.*

Énumérer les sommets est impossible.
Le simplexe n'en visite qu'une poignée.

Un problème *modeste* – 100 variables, 100 contraintes – admet déjà

$$\binom{200}{100} \approx 9 \times 10^{58} \text{ bases.}$$

Le simplexe n'en construit que quelques **centaines** avant d'atteindre l'optimum.

Ce que fait vraiment un solveur

Du cours aux outils du TP

Les outils que vous allez croiser au TP

- `scipy.linprog` : interface Python, s'appuie sur **HiGHS** (libre) – `method='highs'`
  Les prix marginaux sont dans l'attribut `.marginals` du résultat.
- `PuLP` : langage de *modélisation*, appelle CBC par défaut
- **CPLEX** / **Gurobi** : solveurs commerciaux. EOLES utilise les deux, suivant la version

`PuLP` **et GAMS ne *résolvent* rien : ce sont des langages de modélisation.**

Le solveur est derrière, et on peut en changer sans réécrire le modèle.

Valeur marginale d'une contrainte

Optimum des yaourts : $x_A = 300$, $x_B = 200$, profit $z^\star = 2200$ €.

Votre fournisseur vous propose 1 kg de lait de plus.
Combien êtes-vous prêt à le payer ?

Valeur marginale d'une contrainte

Optimum des yaourts : $x_A = 300$, $x_B = 200$, profit $z^\star = 2200$ €.

Votre fournisseur vous propose 1 kg de lait de plus.
Combien êtes-vous prêt à le payer ?

Une façon naïve de répondre : **re-résoudre**. Trois fois, une par ressource, en ajoutant 1 à son stock et *sans rien changer d'autre*.

Ressource	**Stock**	**Nouveau $z^\star$**	**Écart**
Fraise	$800 \to 801$	2201	$+$ **1** €
Lait	$700 \to 701$	2202	$+$ **2** €
Sucre	$300 \to 301$	2200	$+$ **0** €

Le sucre ne rapporte rien : seul le yaourt B en consomme (1 kg par kilo produit), et on n'en produit que 200. Il reste donc **100 kg de sucre inutilisés**.

Valeur marginale d'une contrainte

Optimum des yaourts : $x_A = 300$, $x_B = 200$, profit $z^\star = 2200$ €.

Votre fournisseur vous propose 1 kg de lait de plus.
Combien êtes-vous prêt à le payer ?

Une façon naïve de répondre : **re-résoudre**. Trois fois, une par ressource, en ajoutant 1 à son stock et *sans rien changer d'autre*.

Ressource	**Stock**	**Nouveau $z^\star$**	**Écart**
Fraise	$800 \to 801$	2201	$+$ **1** €
Lait	$700 \to 701$	2202	$+$ **2** €
Sucre	$300 \to 301$	2200	$+$ **0** €

Le sucre ne rapporte rien : seul le yaourt B en consomme (1 kg par kilo produit), et on n'en produit que 200. Il reste donc **100 kg de sucre inutilisés**.

Ces trois nombres sont les **prix marginaux** des trois contraintes.

De combien l'optimum bouge si on desserre la contrainte d'une unité.

Prix marginaux et dictionnaire optimal

Le dictionnaire optimal de l'exercice

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{Max } z = & 2200 & - & 2x_2 & - & x_1 \\
\hline
x_3 = & 100 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_1 \\
x_A = & 300 & + & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_1 \\
x_B = & 200 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_1
\end{array}
$$

Les prix marginaux se lisent **dans la ligne du haut**, au signe près.

Écart	**Contrainte**	**Dans la ligne z**	**Prix**
x_1	Fraise	$-1\,x_1$	**1** €
x_2	Lait	$-2\,x_2$	**2** €
x_3	Sucre	*absente* (elle est en base)	**0** €

Prix marginaux et dictionnaire optimal

Le dictionnaire optimal de l'exercice

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{Max } z = & 2200 & - & 2x_2 & - & x_1 \\
\hline
x_3 = & 100 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_1 \\
x_A = & 300 & + & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_1 \\
x_B = & 200 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_1
\end{array}
$$

Les prix marginaux se lisent **dans la ligne du haut**, au signe près.

Écart	**Contrainte**	**Dans la ligne z**	**Prix**
x_1	Fraise	$-1\,x_1$	**1** €
x_2	Lait	$-2\,x_2$	**2** €
x_3	Sucre	*absente* (elle est en base)	**0** €

x_1 = fraise *inutilisée* : chaque kilo non utilisé coûte 1 € de profit. Donc un kilo de plus en rapporte 1 €. Le sucre, en excès, n'apparaît même pas.

Chaque prix se calcule *toutes choses égales par ailleurs*, et ne vaut que sur une certaine plage, au-delà de laquelle la base optimale change.

Pourquoi les prix se lisent dans la ligne du haut

Un kilo de fraise de plus, c'est un kilo pris *à découvert* sur le stock actuel : dans le dictionnaire, cela revient à poser $x_1 = -1$, et à lire les conséquences.

$$\begin{array}{rcll} z & = & 2200 - x_1 - 2x_2 & \longrightarrow \quad 2200 + 1 \\ x_A & = & 300 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 & \longrightarrow \quad 300 + \frac{2}{3} \\ x_B & = & 200 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_1 & \longrightarrow \quad 200 - \frac{1}{3} \end{array}$$

Pourquoi les prix se lisent dans la ligne du haut

Un kilo de fraise de plus, c'est un kilo pris *à découvert* sur le stock actuel : dans le dictionnaire, cela revient à poser $x_1 = -1$, et à lire les conséquences.

$$\begin{aligned} z &= 2200 - x_1 - 2x_2 &\longrightarrow\quad & 2200 + 1 \\ x_A &= 300 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_1 &\longrightarrow\quad & 300 + \tfrac{2}{3} \\ x_B &= 200 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_1 &\longrightarrow\quad & 200 - \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Le même calcul donne la plage de validité. Avec δ kilos de lait en plus ($x_2 = -\delta$) :

$$\underbrace{x_3 = 100 - \tfrac{2}{3}\delta \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \delta \leqslant 150}_{\text{le sucre s'épuise}} \qquad x_A = 300 - \tfrac{1}{3}\delta \qquad x_B = 200 + \tfrac{2}{3}\delta$$

Une seule substitution donne le prix, sa plage de validité, et l'identité de la ressource qui bloque ensuite.

Interprétation des prix marginaux

1. **Saturation de la contrainte.**
   Prix > 0 : la ressource est *épuisée*, c'est elle qui vous limite.
   Prix $= 0$: ce n'est pas cette contrainte-là qui vous limite (ici le sucre, dont il reste 100 kg).

2. **Prix de réserve.**
   Le lait rapporte 2 € le kilo : en payer 1,50 € est rentable, 2,50 € non.
   Le prix marginal est le prix maximum auquel il vaut la peine d'acheter.

Interprétation des prix marginaux

1. **Saturation de la contrainte.**
   Prix > 0 : la ressource est *épuisée*, c'est elle qui vous limite.
   Prix $= 0$: ce n'est pas cette contrainte-là qui vous limite (ici le sucre, dont il reste 100 kg).

2. **Prix de réserve.**
   Le lait rapporte 2 € le kilo : en payer 1,50 € est rentable, 2,50 € non.
   Le prix marginal est le prix maximum auquel il vaut la peine d'acheter.

3. **Domaine de validité.**
   Ces prix ne valent que *localement*, et pas sur la même plage :

Lait :	2 €/kg	mais seulement jusqu'à **+150 kg**
Fraise :	1 €/kg	jusqu'à **+600 kg**

   Au-delà de +150 kg de lait, c'est le *sucre* qui bloque : le kilo suivant ne rapporte plus rien. Sur un gros achat, la fraise rapporte donc *plus* que le lait (+600 € contre +300 €).

En pratique on ne lit pas le dictionnaire à la main : tout solveur renvoie ces prix gratuitement (`scipy.linprog` : attribut `.marginals`). On les appelle aussi *variables duales* ou *shadow prices*.

Le prix de l'électricité *est* un prix marginal

Rappel de l'objectif (problème jouet d'EOLES) :

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h - ptg_{level,T}.$$

Contrainte d'adéquation, à chaque heure :

$$prod_h + phs_{out,h} + ptg_{out,h} - phs_{in,h} - ptg_{in,h} + deficit_h \geqslant demand_h \quad \longrightarrow \quad \lambda_h$$

Combien coûterait 1 MWh de demande en plus à l'heure h ?

Le prix de l'électricité *est* un prix marginal

Rappel de l'objectif (problème jouet d'EOLES) :

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h - ptg_{level,T}.$$

Contrainte d'adéquation, à chaque heure :

$$prod_h + phs_{out,h} + ptg_{out,h} - phs_{in,h} - ptg_{in,h} + deficit_h \geqslant demand_h \quad \longrightarrow \quad \lambda_h$$

Combien coûterait 1 MWh de demande en plus à l'heure h ?

Heure	λ_h	**Qui fournirait ce MWh ?**
$h = 0$	0	du renouvelable en surplus
$h = 7983$	1	du gaz stocké (plus de renouvelable)
$h = 123$	α	Non fourni, on délest e

Le prix reste entre 0 (écrêter est gratuit) et α (délester reste possible), et s'exprime dans le **numéraire du modèle**, pas en euros.

Le prix de l'électricité *est* un prix marginal

Rappel de l'objectif (problème jouet d'EOLES) :

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h - ptg_{level,T}.$$

Contrainte d'adéquation, à chaque heure :

$$prod_h + phs_{out,h} + ptg_{out,h} - phs_{in,h} - ptg_{in,h} + deficit_h \geqslant demand_h \quad \longrightarrow \quad \lambda_h$$

Combien coûterait 1 MWh de demande en plus à l'heure h ?

Heure	λ_h	**Qui fournirait ce MWh ?**
$h = 0$	0	du renouvelable en surplus
$h = 7983$	1	du gaz stocké (plus de renouvelable)
$h = 123$	α	Non fourni, on déleste

Le prix reste entre 0 (écrêter est gratuit) et α (délester reste possible), et s'exprime dans le **numéraire du modèle**, pas en euros.

Sur un marché de l'électricité, le prix payé se fixe au coût de la **dernière** unité appelée – **c'est exactement λ_h** que le modèle vient de calculer.

Le prix marginal du gaz

Et si vous démarriez l'année avec un peu moins de gaz dans la cuve ? Combien cela vous coûterait-il ?

Stock initial de gaz	**Résultat optimal**
125 000 GWh (plein)	14 302 747
120 000 GWh (−5 000)	14 302 747

Le prix marginal de ce gaz est **nul**. **Une autre contrainte** limite vraiment : sur les 139 heures de déficit, le stockage tourne systématiquement à sa puissance maximale (32,93 GW), alors que la cuve ne descend jamais sous 92,7 % de sa capacité.

Le prix marginal du gaz

Et si vous démarriez l'année avec un peu moins de gaz dans la cuve ? Combien cela vous coûterait-il ?

Stock initial de gaz	Résultat optimal
125 000 GWh (plein)	14 302 747
120 000 GWh (−5 000)	14 302 747

Le prix marginal de ce gaz est **nul**. **Une autre contrainte** limite vraiment : sur les 139 heures de déficit, le stockage tourne systématiquement à sa puissance maximale (32,93 GW), alors que la cuve ne descend jamais sous 92,7 % de sa capacité.

Puissance de sortie	Résultat optimal
32,93 GW	14 302 747
33,93 GW (+1)	12 951 881

Soit 135 GWh de délestage évité ($1\,350\,866/\alpha$) : ce GW supprime près de **10 %** des 1443 GWh de déficit de l'année.

Jamais « *il ne reste plus de gaz* », toujours « *on ne peut pas le sortir assez vite* ».

Le gaz en cuve ne vaut rien de plus. La puissance pour l'en sortir, si.

Retour sur le coefficient α

L'objectif de notre modèle jouet s'écrit:

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h \ - \ ptg_{level,T}$$

Cette formule dit qu'1 GWh de déficit vaut α GWh de gaz en stock. Faute d'avoir modélisé l'année suivante pour calculer sa vraie valeur, on **fixe α à la main**.

Retour sur le coefficient α

L'objectif de notre modèle jouet s'écrit:

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h \ - \ ptg_{level,T}$$

Cette formule dit qu'1 GWh de déficit vaut α GWh de gaz en stock. Faute d'avoir modélisé l'année suivante pour calculer sa vraie valeur, on **fixe α à la main**.

Le modèle porte sa propre valorisation du gaz, héritée du α fixé à la main.

Retour sur le coefficient α

L'objectif de notre modèle jouet s'écrit:

$$\min \ \alpha \sum_h deficit_h \ - \ ptg_{level,T}$$

Cette formule dit qu'1 GWh de déficit vaut α GWh de gaz en stock. Faute d'avoir modélisé l'année suivante pour calculer sa vraie valeur, on **fixe α à la main**.

> Le modèle porte sa propre valorisation du gaz, héritée du α fixé à la main.

Éviter 1 GWh de déficit consomme **physiquement** 1 GWh de gaz (pas α) : le gain est α, le coût est 1, et ça ne vaut le coup que si $\alpha > 1$ – d'où le basculement à $\alpha = 1$.
Vérification :

	$\alpha \geqslant 1$	$\alpha < 1$
Heures de déficit	139	198
Déficit total	1 443 GWh	2 263 GWh
Gaz restant au 31/12	124 180 GWh	125 000 GWh (plein)

Sous le seuil, le modèle préserve tout le gaz et laisse le déficit augmenter de 57 % plutôt que d'y toucher.

La valeur de l'eau

Vous gérez un barrage. À chaque heure, une seule question :

Je turbine maintenant, ou je garde l'eau pour plus tard ?

Ça dépend d'une seule comparaison : ce que vaut l'électricité **maintenant**, contre ce que vaut l'eau **gardée en réserve** pour une heure plus chère à venir.

La valeur de l'eau

Vous gérez un barrage. À chaque heure, une seule question :

Je turbine maintenant, ou je garde l'eau pour plus tard ?

Ça dépend d'une seule comparaison : ce que vaut l'électricité **maintenant**, contre ce que vaut l'eau **gardée en réserve** pour une heure plus chère à venir.

Électricité maintenant plus chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je turbine**
Électricité maintenant moins chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je stocke**

La valeur de l'eau

Vous gérez un barrage. À chaque heure, une seule question :

Je turbine maintenant, ou je garde l'eau pour plus tard ?

Ça dépend d'une seule comparaison : ce que vaut l'électricité **maintenant**, contre ce que vaut l'eau **gardée en réserve** pour une heure plus chère à venir.

Électricité maintenant plus chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je turbine**
Électricité maintenant moins chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je stocke**

Exactement ce que fait le PHS sur les mêmes 139 heures de déficit vues plus haut :

Heures	λ_h	**PHS**
$h = 114$–120	0	remplit ($0 \to 36$ GWh)
$h = 123$	α	vide à pleine puissance ($-9{,}3$ GW)

La valeur de l'eau

Vous gérez un barrage. À chaque heure, une seule question :

Je turbine maintenant, ou je garde l'eau pour plus tard ?

Ça dépend d'une seule comparaison : ce que vaut l'électricité **maintenant**, contre ce que vaut l'eau **gardée en réserve** pour une heure plus chère à venir.

Électricité maintenant plus chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je turbine**
Électricité maintenant moins chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je stocke**

Exactement ce que fait le PHS sur les mêmes 139 heures de déficit vues plus haut :

Heures	λ_h	**PHS**
$h = 114$–120	0	remplit ($0 \to 36$ GWh)
$h = 123$	α	vide à pleine puissance ($-9{,}3$ GW)

Le PHS engrange de l'eau à coût nul, puis la revend en pleine puissance exactement à l'heure où elle vaut le plus cher – une décision prise des heures à l'avance, guidée par le seul signal de prix à venir.

La valeur de l'eau

Vous gérez un barrage. À chaque heure, une seule question :

Je turbine maintenant, ou je garde l'eau pour plus tard ?

Ça dépend d'une seule comparaison : ce que vaut l'électricité **maintenant**, contre ce que vaut l'eau **gardée en réserve** pour une heure plus chère à venir.

Électricité maintenant plus chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je turbine**
Électricité maintenant moins chère que ma réserve	$\longrightarrow$	**je stocke**

Exactement ce que fait le PHS sur les mêmes 139 heures de déficit vues plus haut :

Heures	λ_h	**PHS**
$h = 114$–120	0	remplit ($0 \rightarrow 36$ GWh)
$h = 123$	α	vide à pleine puissance ($-9{,}3$ GW)

Le PHS engrange de l'eau à coût nul, puis la revend en pleine puissance exactement à l'heure où elle vaut le plus cher – une décision prise des heures à l'avance, guidée par le seul signal de prix à venir.

Les barragistes appellent ça la valeur de l'eau depuis les années 1950, sans résoudre le moindre programme linéaire. EOLES la retrouve automatiquement – ici sur l'eau, comme sur le gaz juste avant.

Chaque contrainte a son prix

Les quatre questions qui précèdent portent sur le **même objet** — le prix marginal d'une contrainte — appliqué à quatre contraintes différentes du modèle.

Contrainte	**Son prix répond à**	**Ici**
adéquation horaire	1 MWh de demande en plus	0, 1 ou α
bilan de stock	1 GWh gardé en réserve	valeur de l'eau, du gaz
limite de puissance	1 GW de puissance en plus	1 350 866 ($\simeq$ 135 GWh)
limite de capacité	1 GWh de volume en plus	nul ici

Quatre questions d'investissement, un seul objet mathématique.

C'est pour cela qu'on écrit ces modèles sous forme de programmes linéaires.

Ces prix sont dans le **numéraire du modèle jouet**, dont l'objectif ne compte ni euros ni tonnes de CO_2. Dans EOLES complet, l'objectif est un coût annualisé en euros : les mêmes prix marginaux en sortent directement en €/MWh et en €/MW — c'est ainsi qu'EOLES chiffre le prix de l'électricité et la valeur d'une capacité.

Exercice

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}) \quad & \max z = 4x_1 + 3x_2 \\
& \text{sous: } x_1 \leq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 18 \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

1. Écrire le problème sous la forme standard.
2. Trouver une base évidente dans la matrice A des contraintes. Donner la solution de base associée.
3. Quel nombre maximum de bases peut-on trouver pour ce problème ? Pour les bases B_1, constituée des colonnes (A^1, A^2, A^4) de A, $B_2(A^1, A^2, A^5)$ et $B_3(A^2, A^4, A^5)$, mettre le problème sous forme canonique par rapport à la base puis déterminer la solution de base associée.
4. A partir de l'expression de $(\mathcal{P})$, tracer sur un graphique l'ensemble des solutions admissibles. Retrouver les solutions de base des questions précédentes.
5. Résoudre graphiquement $(\mathcal{P})$.
6. Résoudre $(\mathcal{P})$ par l'algorithme du simplexe (en utilisant la méthode des dictionnaires). En se reportant à la représentation graphique, commenter la succession de sommets visités.

Annexes

Non traitées en séance

Pour référence, à lire pour le TD et le TP

5 Annexe

- Formalisation générale du simplexe
- Formes canonique et standard : exemple général
- Cas particuliers du simplexe
- Phase I du simplexe
- Bases dégénérées

Algorithme du simplexe par la méthode du dictionnaire

Principes généraux (1/5, annexe)

Soit un problème de PL sous la forme:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{sous:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

1. Reformulation sous forme standard par l'ajout des variables d'écart $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ et d'une variable objectif z:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Le problème revient à maximiser z en faisant attention à garder toutes les variables $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$.

Algorithme du simplexe par la méthode des dictionnaires

Principes généraux (2/5, annexe)

A chaque itération, la solution courante est associée à un système d'équations, appelé dictionnaire, qui la définit :

$$\begin{aligned} z &= \overline{z} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{c}_j x_j \\ x_i &= \overline{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \overline{a}_{i,j} x_j \quad (i \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

- x_i : variables de base notées $x_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}_+^m$ et indicées par $\mathcal{B}$.
- x_j : variables hors-base notées $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}_+^n$ et indicées par $\mathcal{N}$.
- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ forment une partition de l'ensemble des indices :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \cup \mathcal{N} &= \{1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\} \\ \mathcal{B} \cap \mathcal{N} &= \emptyset \end{aligned}$$

Algorithme du simplexe par la méthode des dictionnaires

Principes généraux (3/5, annexe)

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

2. Inititalisation: on calcule la solution de base i.e. la solution du dictionnaire obtenue en posant $x_j = 0$, pour tout $j \in \mathcal{N}$.

   Le dictionnaire, la base $(x_j)_{j \in \mathcal{B}}$ et la solution de base associées sont dits réalisables si

$$\forall i \in \mathcal{B}, \ x_i \geq 0.$$

Algorithme du simplexe par la méthode des dictionnaires

Principes généraux (4/5, annexe)

$$\begin{aligned} z &= 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Supposons que la solution de base associée à la base $\mathcal{B}$ soit réalisable.

3. Choix d'une variable x_j, $j \in \mathcal{N}$, à faire entrer dans la base $\mathcal{B}$: on choisit une variable dont le coût réduit $\overline{c}_j$ est **strictement positif**.
   - Choix multiple : plus grand $\overline{c}_j$ (règle de Dantzig), ou plus petit indice (règle de Bland, cf. finitude)
4. Choix d'une variable x_i à faire sortir de la base: si x_k entre en base alors il faut faire attention à ce que toutes les contraintes dépendant de x_k restent positives:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1, j\neq k}^{m} a_{i,j} x_j - a_{i,k} x_k \geqslant 0.$$

   - Choisir la première variable à s'annuler. Si plusieurs variables sont candidates pour sortir, la base suivante sera dite dégénérée.
   - S'il n'y a aucune variable candidate pour sortir de la base (i.e. si $\bar{a}_{i,k} \leqslant 0$ pour tout $i \in \mathcal{B}$), le problème est non-borné.

↪ *On se déplace de sommet en sommet le long d'une arête du polyèdre des contraintes.*

Algorithme du simplexe par la méthode des dictionnaires

Principes généraux (5/5, annexe)

5. Pivotage: on réécrit le dictionnaire avec les nouvelles variable de base en fonction des nouvelles variables hors-base:

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j \\ x_i &= \bar{b}_i - \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j \quad (i \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

où les coefficients $\bar{c}_j,\ j \in \mathcal{N}$ sont appelés les **coûts réduits** et représentent l'impact de l'augmentation d'une variable sur l'objectif.

6. Retour à l'étape 2.

Condition d'optimalité/Condition d'arrêt

La solution de base est optimale si et seulement si tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls :

$$\bar{c}_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{N}$$

↩ retour au cours

Passer d'une forme à l'autre

Exemple général (annexe)

Exemple : $\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x$ sous $Ax \leq b,\ Ex = F$ (ni canonique, ni standard) :

Forme canonique

$$\min_{y\geqslant 0} \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}^\top y \text{ sous } \begin{pmatrix} A & -A \\ E & -E \\ -E & E \end{pmatrix} y \leqslant \begin{pmatrix} b \\ F \\ -F \end{pmatrix}$$

Forme standard

$$\min_{y,s\geqslant 0} \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \text{ sous } \begin{pmatrix} A & -A & I \\ E & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ F \end{pmatrix}$$

avec $y = (x^+, x^-)^\top \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$.

↩ retour au cours

Annexe – Cas particuliers du simplexe

Non traité en séance

Ce qui suit n'est pas abordé en séance. Les deux premiers points vous serviront en TD et en TP ; le troisième est là par curiosité.

Contenu de l'annexe

1. **Problème de démarrage : Phase I.** Que faire quand la base des variables d'écart n'est pas réalisable ($b_i < 0$) – et comment traiter les contraintes d'égalité.

   Le cas se présente dès qu'une contrainte s'écrit $\geqslant$ avec un second membre positif, ce qui est fréquent : dans le modèle de dispatch, l'équilibre offre-demande en est une.

2. **Bases dégénérées.** Quand plusieurs variables sont candidates à la sortie de base, l'itération suivante ne fait pas progresser l'objectif (*stalling*), et l'algorithme peut cycler.

   La règle de Bland et la perturbation lexicographique sont développées ci-après.

3. **Pour aller plus loin.** Formes canonique et standard dans le cas général ; complexité du simplexe et de la programmation linéaire ; ce qu'un solveur industriel ajoute au simplexe du cours.

   Hors programme : à lire par curiosité, pas pour le compte rendu de TP.

En pratique, les solveurs gèrent ces deux cas automatiquement : la Phase I est intégrée (méthode "big-M" ou simplexe dual), et l'anti-cyclage est déclenché sur détection de blocage. Mais savoir qu'ils existent explique la plupart des messages d'erreur que vous rencontrerez (`infeasible`, `unbounded`, `numerical difficulties`).

Annexe – Formes canonique et standard, cas général

Exemple : $\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x$ sous $Ax \le b,\ Ex = F$ (ni canonique, ni standard) :

Forme canonique

$$\min_{y\geqslant \mathbf{0}} \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}^\top y \quad \text{sous} \quad \begin{pmatrix} A & -A \\ E & -E \\ -E & E \end{pmatrix} y \leqslant \begin{pmatrix} b \\ F \\ -F \end{pmatrix}$$

Forme standard

$$\min_{y,s\geqslant \mathbf{0}} \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \quad \text{sous} \quad \begin{pmatrix} A & -A & I \\ E & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ F \end{pmatrix}$$

avec $y = (x^+, x^-)^\top \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$.

✍ **Une question qu'on se pose en implémentant**

On écrit $x = x^+ - x^-$ *sans* imposer $x^+x^- = 0$. N'obtient-on pas des solutions absurdes du type $x^+ = x^- = 5$?

Non, et c'est gratuit : les colonnes associées à x_j^+ et x_j^- sont A_j et $-A_j$, donc liées. Elles ne peuvent pas être toutes deux en base, et l'une des deux est nulle en toute solution de base – en particulier à l'optimum.

Problème de démarrage : Phase I du simplexe

Cette phase permet de trouver une solution de base initiale réalisable lorsque la base donnée par les variables d'écart ne l'est pas.

D'où vient le problème ?

$$\sum_j a_{i,j} x_k \leq b_i \text{ avec } b_i < 0$$

Après ajout de la variable d'écart et écriture sous forme de dictionnaire, on obtient :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_j a_{i,j} x_j$$

Comme $b_i < 0$ la solution n'est pas réalisable

Problème de démarrage : Phase I du simplexe

Que faire ?

1. Pour chaque contrainte telle que $b_i < 0$, on ajoute une variable artificielle x'_{n+i} avec un coefficient -1 en plus de la variable d'écart :

$$\sum_j a_{i,j} + x_{n+i} - x'_{n+i} = b_i$$

2. Remplacer l'objectif initial par min $\sum_{i:b_i<0} x'_{n+i}$
3. Éliminer les variables en base de l'objectif en les remplaçant par l'expression donnée par le dictionnaire
4. La base initiale est donnée par les variables artificielles des contraintes avec $b_i < 0$ et les variables d'écart des contraintes avec $b_i \geq 0$
5. Résoudre le programme linéaire artificielle ainsi obtenu.

Si à la fin de la résolution du programme artificiel, il existe au moins un i tel que $x'_{n+i} > 0$, alors les variables artificielles sont nécessaires pour avoir une solution réalisable.
Alors il n'existe pas de solution réalisable au problème initial
Le problème initial est **irréalisable**

Exemple

$$
\begin{array}{rcrcr}
-x_1 & - & x_2 & = & z[\max] \\
-3x_1 & - & 4x_2 & \leq & -12 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème de démarrage : Phase I du simplexe

Retour au problème initial

Si $x'_{n+i} = 0$ pour tout i tel que $b_i < 0$, toutes les variables artificielles sont hors-base
On a une solution de base réalisable pour le problème initial donnée par la base optimale de la Phase I

1. Supprimer les variables artificielles
2. Reprendre l'objectif initial
3. Éliminer les variables en base de l'objectif en les remplaçant par leur expression donnée par le dictionnaire
4. Reprendre la résolution normale du simplexe

Et les contraintes d'égalité ?

$$\sum_j a_{i,j} x_j = b_i$$

On peut se ramener au cas précédent en remplaçant la contrainte par

$$\begin{cases} \sum_j a_{i,j} x_j \leq b_i \\ \sum_j (-a_{i,j}) x_j \leq -b_i \end{cases}$$

L'une des deux contraintes posera problème et fera intervenir une variable artificielle: il n'est pas nécessaire de passer par cette étape, on peut ajouter directement la variable d'écart avec le coefficient 1 si $b_i \geq 0$ ou -1 sinon.

Bases dégénérées

Base dégénérée

Quand plusieurs variables sont candidates pour sortir de la base, la nouvelle solution de base aura une (ou plusieurs) variables de base prenant la valeur 0.
On dit que la solution de base est **dégénérée**.

Exemple

$$\begin{aligned} z &= 0 + 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ x_4 &= 1 - 2x_3 \\ x_5 &= 3 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\ x_6 &= 2 + x_1 - 3x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

Solution : $(0, 0, 0, 1, 3, 2)$ et $z = 0$
On fait entrer x_3 en base
x_4, x_5 et x_6 sont candidates pour sortir de la base
Choisissons x_4

Les deux slides suivantes déroulent les pivots : les itérations font entrer x_1 puis x_2 **sans faire bouger la solution** $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ ni la valeur $z = 4$ – trois pivots pour zéro progrès. C'est le phénomène de *stalling*, et c'est lui qui rend le cyclage possible.

Bases dégénérées

$$\begin{aligned} z &= 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 0 - 2x_1 + 4x_2 - 3x_4 \\ x_6 &= 0 + x_1 - 3x_2 - 2x_4 \end{aligned}$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$
x_1 entre en base et x_5 sort

$$\begin{aligned} z &= 4 - x_5 + 3x_2 - x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 &= 0 - \frac{1}{2}x_5 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_6 &= 0 - \frac{1}{2}x_5 - x_2 + \frac{7}{2}x_4 \end{aligned}$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$
x_2 entre en base et x_6 sort

Bases dégénérées

$$\begin{aligned} z &= 4 - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6 + \frac{19}{2}x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 &= 0 - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6 + \frac{17}{2}x_4 \\ x_2 &= 0 - \frac{1}{2}x_5 - x_6 + \frac{7}{2}x_4 \end{aligned}$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$. x_4 entre en base et x_3 sort.

$$\begin{aligned} z &= \frac{27}{2} - \frac{5}{2}x_5 - 3x_6 - 19x_3 \\ x_4 &= 1 - 2x_3 \\ x_1 &= \frac{17}{2} - \frac{3}{2}x_5 - 2x_6 - 17x_3 \\ x_2 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_5 - x_6 - 7x_3 \end{aligned}$$

Solution optimale : $(\frac{17}{2}, \frac{7}{2}, 0, 1, 0, 0)$ et $z = \frac{27}{2}$

Bilan : quatre pivots, dont les trois premiers n'ont fait progresser ni la solution ni l'objectif. Ici l'algorithme finit par se débloquer ; avec un choix de pivot malheureux il peut au contraire revenir sur une base déjà visitée et cycler indéfiniment – d'où la règle de Bland.

Cyclage, et comment l'empêcher

La règle de Bland

Le nombre de dictionnaires possibles, $\binom{n+m}{m}$, est **fini**. Si l'algorithme ne se termine pas, c'est donc qu'il *repasse* par une base déjà visitée – et cela ne peut arriver qu'entre bases **dégénérées** : dès qu'un pivotage fait progresser z, la base ne peut plus jamais réapparaître.

Garantie de finitude (Bland, 1977)

L'algorithme du simplexe termine si, à chaque itération, les variables entrante *et* sortante sont choisies, parmi les candidats possibles, selon la **règle du plus petit indice**.

L'autre parade : la perturbation lexicographique

On ajoute aux seconds membres des quantités $0 < \varepsilon_i \ll 1$ formant une suite décroissante très rapide. La dégénérescence disparaît (plus aucune égalité exacte dans le test du ratio), donc le cyclage aussi.

En pratique les solveurs **n'utilisent pas Bland par défaut** : correcte, mais lente. Ils emploient une règle rapide (Dantzig, *steepest edge*, *devex*) et ne basculent sur l'anti-cyclage qu'en cas de blocage détecté.

Complexité et solveurs – pour aller plus loin

Le simplexe : exponentiel au pire, rapide en pratique

- Terminaison en au plus $\binom{n+m}{m}$ itérations.
- **Cube de Klee–Minty** (1972) : des problèmes où le simplexe visite effectivement $2^n - 1$ sommets. Le pire des cas est bien **exponentiel**.
- Empiriquement, le nombre d'itérations observé est de l'ordre de $\Theta(m + \log n)$ – très loin du pire des cas.

Et la programmation linéaire elle-même ?

- Le *problème* est **polynomial** : méthode de l'ellipsoïde (Khachiyan, 1979), puis **points intérieurs** (Karmarkar, 1984) – seuls ces derniers étant efficaces en pratique.
- Nuance : polynomial *en la taille binaire des données*. On ignore encore s'il existe un algorithme **fortement polynomial** (nombre d'opérations arithmétiques polynomial en m, n seuls). C'est le **9e problème de Smale**, ouvert.

Ce qu'un solveur industriel ajoute au simplexe du cours

- un **presolve** : élimination des variables fixées, contraintes redondantes, lignes et colonnes singleton. Sur des modèles structurés, il supprime couramment 30 à 50 % du problème *avant* toute itération.
- une algèbre linéaire **creuse**, avec factorisation LU mise à jour d'un pivot à l'autre, plutôt qu'une réécriture explicite du dictionnaire.
- le **simplexe révisé** et sa variante **duale** – souvent la plus rapide, et la seule permettant de re-résoudre efficacement après modification d'un b_i : exactement le cas de l'analyse de sensibilité.
- les **points intérieurs** pour les très grands problèmes, suivis d'un *crossover* vers une solution de base, pour récupérer un sommet et donc des prix duaux exploitables.