TD 2 Logarithme, zéros isolés, holomorphie

Exercice 1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que seule la fonction nulle satisfait à la condition $f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 2. Logarithme complexe
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re e(z) > 0\}$ et $f(z) = f(x+iy) = \ln|z| + i\arctan(\frac{y}{x})$.
1) Montrer que f est holomorphe sur Ω.
2) Peut-on prolonger f en une fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$?
3) Calculer $F'(z)$.

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions analytiques sur un ouvert U connexe tel que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ qui coïncident avec la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire f satisfaisant $f(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in U \cap \mathbb{R}$. Que dire si U n'est pas connexe.

Exercice 4. Soit $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0. Montrer que si f est une fonction $\mathbb{C}$-analytique sur le disque ouvert $D(0,R)$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(a_n)$ est réel alors f est réelle, c'est-à-dire $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$, pour tout $z \in D(0,R)$).

Exercice 5. En quels points les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$$z \mapsto \overline{z}, \quad z \mapsto |z|^2, \quad z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}.$$

Exercice 6. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Les fonctions suivantes sont elles holomorphes?

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \quad z \mapsto \overline{f(\overline{z})} \text{ sur } \overline{U} = \{z \mid \overline{z} \in U\}, \quad z \mapsto f(\overline{z}) \text{ sur } \overline{U}.$$

Exercice 7. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U.
1) Montrer que si pour tout z de U $f'(z) = 0$ alors f est cosntante sur U.
2) Montrer que si $\Re e(f)$, $\Im m(f)$ ou $|f|$ est constante sur U alors f est constante sur U.

Exercice 8. Déterminer les fonctions holomorphes $f(z) = f(x+iy)$ sur $\mathbf{D}$ telles que $\Re e(f) = \sin x \cosh y + 2\cos x \sinh y$.

Exercice 9. On définit les opérateurs différentiels $\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ et $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ en sorte que f est holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ ssi elle est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et satisfait $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ sur Ω (on a alors $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$).

(1) Calculer, pour $k, m \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^k \overline{z}^m)$. En déduire qu'un polynôme des deux variables réelles x et y à coefficients complexes $P(x,y) = \sum_{k,m=0}^{N} \beta_{k,m} x^k y^m$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ssi il peut s'écrire sous la forme $P(x+iy) = \sum_n a_n (x+iy)^n$, où les a_n sont des nombres complexes (que l'on ne demande pas de calculer en fct des $\beta_{k,m}$).

(2) Montrer que si f est de classe C^2 (au sens réel) sur D ouvert de $\mathbb{C}$, $4\partial\overline{\partial} f = \Delta f$ sur D où Δ est l'opérateur laplacien. En déduire que si f est holomorphe sur D, alors $\Delta \Re e f \equiv \Delta \Im m f \equiv 0$ sur D.

(3) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$; vérifier que $\partial\overline{\partial}(f\overline{g}) = f'\overline{g'}$. En déduire que si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ sont telles que $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur Ω, alors chacune des fonctions f_k doit être constante sur Ω.

Exercice 10. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos(\pi z/2) = 0$.

2)Soit $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{2+z}\right)$.

2.1) Quel est le plus grand ouvert Ω sur lequel f est holomorphe ?

2.2) Montrer que f possède une infinité de zéros dans Ω et que cet ensemble possède un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Ceci contredit-t-il le théorème des zéros isolés?

3) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière. On désigne par $Z(f)$ l'ensemble $\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ de ses zéros.

3.1) Donner un exemple d'une fonction f non constante telle que $Z(f) = \emptyset$.

3.2) Donner un exemple d'une fonction f non constante telle que $Z(f)$ soit infini.

3.3) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *non identiquement nulle* telle que $Z(f)$ soit infini. Montrer que pour tout $R > 0$ l'ensemble $Z_R(f) := Z(f) \cap \{\, |z| < R\}$ est fini, puis que $Z(f)$ est dénombrable.

3.4) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *non identiquement nulle* telle que $Z(f)$ soit infini. Soit $(z_n)_n$ l'ensemble de ses zéros. Montrer que $\lim_n |z_n| = +\infty$.

Exercice 11. Soit $w \in \mathbb{C}$, avec $\Re e\, w > 0$, a, b réels $a < b$. En intégrant e^z sur un segment convenable prouver l'inégalité : $|e^{bw} - e^{aw}| \leq (b-a)|w|\, e^{b\,\Re e\, w}$.

Exercice 12. Soient $a > 0$, $b > 0$ et γ l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ paramétrée par $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t, t \in [-\pi, \pi]$. Calculer de deux manières différentes l'intégrale $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

En déduire l'égalité
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = 2\pi/ab$$