Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

séance 8

11 Octobre 2021

Revenons à la preuve de Prokhorov, sens direct.

Si $(\mu_n \,;\, n \geq 1) \subset \mathcal{F}$ tendue

alors $\forall j \geq 1$, $\exists K_j$, $\inf\limits_{n \geq 1} \mu_n(K_j) \geq 1 - \frac{1}{2^j}$

⚠ Je suppose $K_j \uparrow$.

Posons
$$\nu_n^j = \frac{\mathbb{1}_{K_j} \cdot \mu_n}{\mu_n(K_j)} \in \mathcal{M}_1(K_j)$$

Par la propositᵒ intermédiaire, $\forall j$, ν_n^j CV à extractᵒ près

Par extractᵒ diagonale,
$$\exists \varphi_1, \quad \nu^j_{\varphi_1(n)} \to \nu^j.$$

En extrayant encore $\quad \mu_{\varphi_2 \circ \varphi_1(n)}(K_j) \longrightarrow N_j \geq 1 - \frac{1}{2^j}$

Donc on a une extractᵒ $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ tq :
$$\begin{cases} \mu_{\varphi(n)}(K_j) \longrightarrow \mu_j \geq 1 - \frac{1}{2^j} \\ \nu^j_{\varphi(n)} \longrightarrow \nu^j \qquad \forall j \geq 1. \end{cases}$$

<u>Idée</u> : $\nu^j_{\varphi(n)}$ pour $j \geq 1$ définissent la même mesure renormalisée sur des compacts de plus en plus grands.
Il suffit de recoller !

$\forall B \in Bor(E)$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(B^{2\varepsilon}\cap K_{j+1}) \geq \mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(\overline{B^{\varepsilon}}\cap K_{j+1})$$

Portmanteau

$$\geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_{\varphi(n)}(K_{j+1})\, \nu^{j+1}_{\varphi(n)}(\overline{B^{\varepsilon}}\cap K_{j+1})$$

$$= \limsup_{n\to+\infty} \mu_{\varphi(n)}(\overline{B^{\varepsilon}}\cap K_{j+1})$$

Monotonie

$$\geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_{\varphi(n)}(\overline{B^{\varepsilon}}\cap K_{j})$$

$$= \mu_j \limsup_{n\to+\infty} \nu^{j}_{\varphi(n)}(\overline{B^{\varepsilon}}\cap K_{j})$$

$$\geq \mu_j \liminf_{n\to+\infty} \nu^{j}_{\varphi(n)}(B^{\varepsilon} \cancel{\cap K_{j}})$$

$$\geq \mu_j\, \nu^{j}(B^{\varepsilon}\cap K_{j})$$

Portmanteau

Au final $\mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(B^{2\varepsilon}\cap K_{j+1}) \geq \mu_j\, \nu^{j}(B^{\varepsilon}\cap K_{j})$

Avec $\varepsilon \to 0$:

$$\mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(\overline{B}\cap K_{j+1}) \geq \mu_j\, \nu^{j}(\overline{B}\cap K_{j})$$

ie $\forall F$ fermé

$$\mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(F\cap K_{j+1}) \geq \mu_j\, \nu^{j}(F\cap K_{j})$$

Régularité $\rightsquigarrow$ des mesures

$\forall B \in Bor(E)$,

$$\mu_{j+1}\, \nu^{j+1}(B\cap K_{j+1}) \geq \mu_j\, \nu^{j}(B\cap K_{j})$$

$\rightsquigarrow \quad \exists\, \mu : Bor(E) \longrightarrow [0,1]$ (à ce stade pas nécessairement mesure de proba)

$$\mu(B) = \lim_{j \to +\infty} \underbrace{\mu_j\, \nu^j (B \cap K_{j+1})}_{\text{croissant, positif, borné par } 1}$$

Or $1 - \frac{1}{2_j} \leqslant \mu_j \leqslant 1$ donc $\lim_{j \to +\infty} \mu_j = 1$

Donc $\mu(B) = \lim_{j \to +\infty} \nu^{j+1}(B \cap K_{j+1})$

* μ mesure de proba car

  - $\mu(E) = \lim_{j \to +\infty} \nu^{j+1}(K_{j+1}) = 1$.

  - $\mu(B_1 \sqcup B_2) = \lim \nu^{j+1}(B_1 \cap K_{j+1}) + \nu^{j+1}(B_2 \cap K_{j+1})$

    disjoints $= \mu(B_1) + \mu(B_2)$.

  - Si $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ union croissante

alors par croissance de $\mu = \lim_{j \to +\infty} \mu_j \nu^j$

$$\mu(B_k) \geqslant \mu_j\, \nu^j (B_k \cap K_{j+1}) \quad \forall j \geqslant 1$$

donc $\lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) \geqslant \mu_j\, \nu^j (B \cap K_{j+1}) \ \forall j$

car ν^j mesure $\rightarrow$

donc $\lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) \geqslant \mu(B)$

et $\leqslant$ évidente

* $\mu(K_j) \geqslant \mu_j \, \nu^j(K_j) = \mu_j \geqslant 1 - \frac{1}{2^j}$

évidemment.

* Mq enfin $\mu_{\varphi(n)} \longrightarrow \mu$ étroitement.

Si f continue bornée alors

$$|\mu_{\varphi(n)}(f) - \mu(f)| \qquad \underset{\triangle \text{ restrict}^\circ}{\overset{\nu^j(f)\,\mu(K_j)}{\|}}$$

$$\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2^j} + \left|\mu_{\varphi(n)}(\mathbb{1}_{K_j} f) - \mu(\mathbb{1}_{K_j} f)\right|$$

$$= \frac{\|f\|_\infty}{j} + \Big|\underbrace{\mu_{\varphi(n)}(K_j)}_{\geqslant 1 - \frac{1}{2^j}} \nu^j_{\varphi(n)}(f) - \underbrace{\mu(K_j)}_{1 - \frac{1}{2^j}} \nu^j(f)\Big|$$

$$\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{j} + \underbrace{\left|\nu^j_{\varphi(n)}(f) - \nu^j(f)\right|}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

(Extract° diagonale de départ)

Donc $\limsup_{n \to +\infty} |\mu_{\varphi(n)}(f) - \mu(f)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{j} \quad \forall j \geqslant 1$

$\boxtimes$