Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

Séance 7

6 Octobre
2021

⑥ Preuve du thm de Prokhorov E polonais

$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1(E)$ tendue

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ rel. compact pour la topologie étroite.

$\boxed{\Leftarrow}$ (E, d) métrique complet séparable. $\overline{\mathcal{F}}$ compact. Quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$, on peut supposer $\mathcal{F}$ compact car

$\overline{\mathcal{F}}$ tendu $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ tendu

$\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact, $\sup_{\mu \in \mathcal{F}} \mu(K^c) \leq \varepsilon$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact $\sup_{\mu \in \mathcal{F}} \mu(K^c) \leq \varepsilon$

Oui

Lemme : Si $\mathcal{F}$ compact & $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \uparrow O_n$ union croissante d'ouverts

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall \mu \in \mathcal{F}$,
$$\mu(O_N) \geq 1 - \varepsilon$$

Preuve : Sinon $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists \mu_N \in \mathcal{F}$,
$$\mu_N(O_N) < 1 - \varepsilon$$

Or $\mathcal{F}$ compact ($\mathcal{M}_1(E)$ métrique par ⑤)

Donc par caractérisat° séquentielle

$\exists \varphi$, $\mu_{\varphi(N)} \xrightarrow{N \to +\infty} \mu$ étroitement.

Donc par Portmanteau sur les ouverts

$$\forall n, \quad \mu(O_n) \overset{\text{Portmanteau}}{\leq} \liminf_{N \to +\infty} \mu_N(O_n)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\leq} \liminf_{N \to +\infty} \mu_N(O_N) \qquad O_n \subset O_N \text{ si } N \gg 1$$

$$\overset{\text{Hypothèse}}{<} 1 - \varepsilon$$

Donc $\bigcup_{n \geq 1} O_n \not\supseteq E$

Reprenons la preuve que $\mathcal{F}$ compact $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ tendu

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_n \,;\, n \geq 1)$ suite dense.

$k \in \mathbb{N}$ fixé $\quad E = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} B\left(x_n ; \frac{1}{k}\right)$ recouvrement croissant

Lemme $\rightsquigarrow$ $\exists\, N_k(\varepsilon), \ \forall \mu \in \mathcal{F}, \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} \underbrace{B\left(x_n ; \frac{1}{k}\right)}_{\text{ouvert}}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$

$$\rightsquigarrow \quad K := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} B_F(x_n ; 1/k)$$

satisfait $\forall \mu \in \mathcal{F}, \ \mu(K^c) = \mu\left[\bigcup_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} \underbrace{B_F(x_n ; 1/k)}_{\text{fermé}}\right)^c\right]$

$$\overset{\text{monotonie}}{\leq} \mu\left[\bigcup_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq 1}^{N_k(\varepsilon)} B(x_n ; 1/k)\right)^c\right]$$

$$\leq \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

On a donc

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K = K_\varepsilon, \quad \sup_{\mu \in \mathcal{F}} \mu(K^c) \leq \varepsilon.$

et K compact $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} K \text{ précompact par construct}^\circ. \\ K \text{ fermé dans } E \text{ complet donc complet.} \end{cases}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Commençons par le cas d'un espace compact

Proposit° intermédiaire $\circledast$: Si (K, d) espace métrique compact. Alors de toute suite $(\mu_n ; n \geq 1) \subset \mathcal{M}_1(K)$, on peut extraire une sous-suite CV.

Preuve : En fait, c'est juste une version abstraite du cas réel $K = [a, b]$ où nous avons utilisé la densité des polynômes (Stone-Weierstraß) dans $\mathcal{C}(K)$ et l'extract° diagonale.

Ici $\begin{cases} K \text{ muni de } d \\ \mathcal{C}(K) \text{ muni de } \|\cdot\|_\infty. \\ (x_n ; n \geq 1) \text{ suite dense dans } K. \end{cases}$

$A := \mathbb{Q}[f_k \,,\, k \geq 1]$ où $f_k(x) = d(x, x_k)$

$\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par les f_k

$\subset \mathcal{C}(K)$ sous-algèbre

* Mq A dense.

Thm de Stone-Weierstraß abstrait (Admis)

A sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ qui sépare les points :

$\forall (x, y) \in K \times K, \quad x \neq y \Longrightarrow \exists f \in A, \ f(x) \neq f(y)$

$\Longleftrightarrow$ A dense dans $\mathcal{C}(K)$

Mq ici $A = \mathbb{Q}[f_k ; k \geq 1]$ par contraposée.

$\forall f \in A, \ f(x) = f(y)$

$\Longrightarrow \forall k \geq 1, \quad f_k(x) = f_k(y)$

$\Longleftrightarrow \forall k \geq 1, \quad d(x, x_k) = d(y, x_k)$

$\underset{x_k \to y}{\Longrightarrow} \quad 0 = d(y, y) = \lim\limits_{k \to +\infty} d(x, x_k) = d(x, y)$

$\Longrightarrow x = y$.

Ainsi par Stone-Weierstraß abstrait, A <u>dense</u>.

* A dénombrable par construct°.

* Extraction diagonale !

$\forall f \in A, \quad |\mu_n(f)| \leq \|f\|_\infty < +\infty$

$\rightsquigarrow$ Pour chaque f, on peut extraire

diagonal $\rightsquigarrow$ $\exists \varphi$ extract°, $\forall f \in A$, $\mu_{\varphi(n)}(f) \longrightarrow M(f)$

Clairement $M : A \to \mathbb{R}$ linéaire.

* Propriétés de la limite Λ :

↳ $\forall f \in A$, $|M(f)| = |\lim \mu_{\varphi(n)}(f)| \leqslant |f|_\infty$.

continue donc uniformément continue.

↳ M forme linéaire uniformément continue sur A dense

$\rightsquigarrow$ Unique extension $M : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue.

↳ $\forall g \in \mathcal{C}(K)$, $M(g) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu_{\varphi(n)}(g)$

En effet si $g_k \in A \to g$

alors $| \mu_{\varphi(n)}(g_k) - \mu_{\varphi(n)}(g) | \leqslant |g - g_k|_\infty \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Donc si u valeur d'adhérence de $\mu_{\varphi(n)}(g)$,

on a : $| M(g_k) - u | \leqslant |g - g_k|_\infty \to 0$

Donc $u = \lim\limits_{k \to +\infty} M(g_k) = M(g)$

Donc $M(g)$ unique val. d'adhérence de $\mu_{\varphi(n)}(g)$.

↳ A ce stade, si $M(g) = \int g \mu$, on a fini.

Mais nous ne savons pas que M forme linéaire continue, $M(1) = 1$

$$M(f) \geqslant 0 \quad \text{si } f \geqslant 0$$

est une mesure ! C'est le thm de représentat° de Riesz !

Suite de la preuve en séance 8