Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

séance 6

4 Octobre 2021

Propositº [Kantorovich - Rubinstein] (E,d) métrique

$$\|f\|_{BL} := \|f\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

BL = Bounded Lipschitz (Lipschitz bornée)

$$= \{ f : E \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{BL} < +\infty \}$$

$$\beta(\mu,\nu) := \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \int_E f \mu - \int_E f \nu \right|$$

est une distance sur $\mathcal{M}_1(E)$ nommée distance de Kantorovich - Rubinstein.

Preuve: • Les faits que $\begin{cases} \beta(\mu,\mu) = 0 \\ \text{Symétrie} \\ \text{Inégalité triangulaire} \end{cases}$ sont faciles.

• $\beta(\mu,\nu) = 0 \Rightarrow \forall f, \left(\|f\|_{BL} \leq 1 \Rightarrow \int f \mu = \int f \nu\right)$

$\Rightarrow \forall f$ lipchitz bornée, $\mu(f) = \nu(f)$

$\Rightarrow \mu = \nu$

↑ Régularité des mesures ⚠ (E,d) métrique

$\square$

Thm [Métrisabilité de $\mathcal{M}_1(E)$ par β & ρ]

On a équivalence entre :

(1) $\mu_n \to \mu$ étroitement (CV faible)

(2) $\beta(\mu_n, \mu) \to 0$ (CV Kantorovich-Rubinstein)

(3) $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$ (CV Lévy-Prokhorov)

Avant la preuve, nous aurons besoin d'un outil classique.

<u>Notat°</u> : Module de continuité uniforme pour $f : (E,d) \to \mathbb{R}$

$$\omega_\delta(f) := \sup_{d(t,s) \leq \delta} |f(t) - f(s)|$$

Rappelons que f unif. continue $\Longleftrightarrow \lim_{\delta \to 0} \omega_\delta(f) = 0$

Thm [Ascoli - Arzela]

Soit $\begin{cases} (K,d) \text{ un espace métrique compact} \\ \mathcal{C}(K) := \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ continues} \} \end{cases}$

On a que $A \subset \mathcal{C}(K)$ relativement compacte ssi

(1) ponctuellement unif. borné :

$$\forall t \in K, \quad \sup_{f \in A} |f(t)| < +\infty$$

(2) équicontinuité :

$$\sup_{f \in A} \omega_\delta(f) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

(1') En particulier si $K \subset \mathbb{R}$ interval compact (ou plus généralement $K \subset \mathbb{R}^d$ convexe compact), on peut remplacer (1) par

$$\exists t_0 \in K, \quad \sup_{f \in A} |f(t_0)| < +\infty$$

Preuve : * Montrons (1) en supposant (1') + (2) :

On a : $\forall t \in K$,

$$|f(t)| \leqslant |f(t_0)| + \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

où $t_k = t_0 + \frac{(t-t_0)k}{n}$

$$\leqslant |f(t_0)| + n\,\omega_{\Delta t}(f)$$

$\Delta t := \frac{d(t,t_0)}{k}$

$$\leqslant |f(t_0)| + n\,\omega_{\frac{\mathrm{diam}(K)}{n}}(f)$$

Puis $\sup_{f \in A} |f(t)| \leq \underbrace{\sup_{f\in A} |f(t_0)|}_{\substack{<+\infty \\ \text{par } (1')}} + \underbrace{n \underbrace{\sup_{f\in A} \omega_{\frac{\text{diam} K}{n}}(f)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}_{\substack{<+\infty \text{ pour} \\ n \text{ assez grand}}}$ $\boxed{\checkmark}$

* Rel. compact $\Rightarrow$ (1) + (2) :

Si A rel. compact, alors précompact :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \underset{\substack{\shortparallel \\ n}}{n_\varepsilon} \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots f_n \in A$ telles que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$.

En particulier :

$\hookrightarrow \sup_{f\in A} |f|_\infty \leq \varepsilon + \sup_{1\leq i \leq n_\varepsilon} |f_i|_\infty < +\infty$

donc A unif borné

donc (1).

$\hookrightarrow \forall f \in A$, $\forall (t,s) \in K\times K$,

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_i(t) - f_i(s)| + \overbrace{|f(s) - f_i(s)|}^{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f(t) - f_i(t)|}_{<\varepsilon}$$

En choisissant $\overset{(f)}{i}$ tq $f \in B(f_i, \varepsilon)$, on a :

$$\forall f \in A, \quad \omega_\delta(f) \leq 2\varepsilon + \omega_\delta(f_i)$$

D'où $\sup_{f \in A} \omega_\delta(f) \leq 2\varepsilon + \sup_{1 \leq i \leq n} \omega_\delta(f_i)$

Par équicontinuité des f_i (Heine), tend vers 0 si $\delta \to 0$

Donc $\limsup_{\delta \to 0} \sup_{f \in A} \omega_\delta(f) \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

* (1) + (2) $\Rightarrow$ A relativement compact.

Remarquons que si A vérifie (1) & (2) alors $\overline{A}$ vérifie (1) & (2).

et on utilisera la caractérisat° séquentielle ie $(f_n ; n \geq 1) \subset A$ donnée

Mq $\exists \varphi$ extract°, $\| f_{\varphi(n)} - f \|_\infty \to 0$

D'abord remarquons :

- par équicontinuité, $\forall n \geq 1$, $\exists \delta_n \leq 1/n$,

$$\sup_{f \in A} \omega_{\delta_n}(f) \leq 1/n$$

- par compacité de K,

$\forall n \geq 1$, $\exists (t_{n,j})_{j \in J_n}$ avec

$|J_n| < +\infty$ & $K \subset \bigcup_{j \in J_n} B(t_{n,j} ; 1/n)$

• Par uniforme bornitude :

$\left(f_m(t_{n,j}) \ ; \ m \geq 1 \right)$ bornée $\forall n \geq 1$, $\forall j \in J_n$

$\Rightarrow$ Par extract° (Bolzano - Weierstraß)

$\exists \varphi_1$, $\left(f_{\varphi_1(m)}(t_{1,j}) \ ; \ m \geq 1 \right)$ suite CV $\forall j \in J_1$

Par extract° encore :

$\exists \varphi_2$, $\left(f_{\varphi_2 \circ \varphi_1(m)}(t_{n,j}) \ ; \ m \geq 1 \right)$ suite CV $\forall 1 \leq n \leq 2$, $\forall j \in J_n$.

$\vdots$

$\Rightarrow$ Par extract° diagonale $\psi(m) = \varphi_m \circ \dots \varphi_1(m)$

$\left(f_{\psi(m)}(t_{n,j}) \ ; \ m \geq 1 \right)$ suite CV $\forall n \geq 1$, $\forall j \in J_n$

Posons $\begin{cases} K' := \{ t_{n,j} \ ; \ n \geq 1, \ j \in J_n \} \\ \quad \subset K \text{ et dense} \\ f(t') := \lim_{m \to +\infty} f_{\psi(m)}(t') \quad \forall t' \in K' \end{cases}$

⚠ f est unif. continue sur K'

car $|t-s| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| = \lim_{m \to +\infty} |f_{\psi(m)}(t) - f_{\psi(m)}(s)| \leq \sup_{g \in \mathcal{A}} \omega_g(\delta) \to 0$

Il existe donc une unique extension continue

$f : K \to \mathbb{R}$ & unif. continue !

Enfin on peut mq $|f - f_{\varphi(m)}|_\infty \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$:

$\forall t \in K, \forall t' \in K',$

$$|f(t) - f_{\varphi(m)}(t)| \leqslant |f(t) - f(t')| + |f(t') - f_{\varphi(m)}(t')|$$
$$+ |f_{\varphi(m)}(t') - f_{\varphi(m)}(t)|$$

On prend $t' = t_{n,j}$ tel que

$$\begin{cases} |t - t'| \leqslant \delta_n \leqslant 1/n \\ |f_{\varphi(m)}(t') - f_{\varphi(m)}(t)| \leqslant \sup\limits_{g \in A} \omega_{\delta_n}(g) \leqslant 1/n \end{cases}$$

Donc $\forall t \in K$, $|f(t) - f_{\varphi(m)}(t)| \leqslant \omega_{\delta_n}(f) + 2/n$

$\leadsto \lim\limits_{n \to +\infty} |f - f_{\varphi(m)}|_\infty \to 0$

$\boxed{\checkmark}$

Passons à la preuve de la métrisabilité de la CV étroite.

Preuve : (1) $\Rightarrow$ (2)

On suppose $\mu_n \xrightarrow{n \to +\infty} \mu$ étroitement.

Mq $\beta(\mu_n, \mu) \to 0$

* Par tension de μ, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ "K_ε", $\mu(K) \geq 1-\varepsilon$.

⚠ Non uniforme en n ! C'est Prokhorov non démontré !

$\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall n \geq 1, \mu_n(K) \geq 1-\varepsilon$ NON

D'où l'idée de poser K^ε = ε-voisinage de K

$= K_\varepsilon^\varepsilon$ (ouvert)

et par Portmanteau :

$$\liminf_{n \to +\infty} \mu_n(K^\varepsilon) \geq \mu(K^\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$$

Donc pour n assez grand, $\mu_n(K^\varepsilon) \geq 1-2\varepsilon$

* Par Ascoli, $A = \{f : E \to \mathbb{R}, \|f\|_{BL} \leq 1\}$

$A_K = \{f|_K \,;\, f \in A\}$

borné & équicontinu donc sel. compact

donc précompact

$\rightsquigarrow \exists n = n_\varepsilon$

$\exists f_1, \dots, f_n$, $A_K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$

$\rightsquigarrow \forall f \in A_K$, $\exists j = j(f)$,

$$\sup_{t \in K} |f(t) - f_j(t)| \leq \varepsilon$$

$\rightsquigarrow \forall f \in A$, $\exists j = j(f)$

$$\sup_{t\in K^\varepsilon} |f(t)-f_j(t)|$$

$$\leqslant \underbrace{\sup_{t\in K} |f(t)-f_j(t)|}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\sup_{t\in K^\varepsilon}\inf_{s\in K} |f(t)-f(s)| + \sup_{t\in K^\varepsilon}\inf_{s\in K} |f_j(t)-f_j(s)|}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ car } f \text{ 1-lip.}}$$

$$\leqslant 3\varepsilon$$

Donc $\forall f\in A$, $\exists\ j=j(f)\in [\![1,n_\varepsilon]\!]$,

$$|\mu_n(f)-\mu(f)|$$

$$\leqslant |\mu_n(f-f_j)| + |\mu(f-f_j)| + \left|\int_E f_j\mu_n - \int f_j \mu\right|$$

$$\leqslant |\mu_n(f_j)-\mu(f_j)| + \Big|\underbrace{\int_{K^\varepsilon}\mu_n(f-f_j)}_{\leqslant 3\varepsilon}\Big| + \underbrace{|f-f_j|_\infty}_{\leqslant 2}\ \underbrace{\mu_n[(K^\varepsilon)^c]}_{\leqslant 2\varepsilon} + \Big|\underbrace{\int_K \mu(f-f_j)}_{\leqslant \varepsilon}\Big| + \underbrace{|f-f_j|_\infty}_{\leqslant 2}\ \underbrace{\mu[K^c]}_{\leqslant \varepsilon}$$

$$\leqslant |\mu_n(f_j)-\mu(f_j)| + \underbrace{7\varepsilon + 3\varepsilon}_{10\varepsilon}$$

Donc $\beta(\mu_n, \mu) := \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} |\mu_n(f) - \mu(f)|$

$\leq 10\,\varepsilon + \underbrace{\sup_{1 \leq j \leq n_\varepsilon} |\mu_n(f_j) - \mu(f_j)|}_{\to 0 \text{ par CV étroite}}$

Donc $\limsup_{n \to +\infty} \beta(\mu_n, \mu) \leq 10\,\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

& $\lim_{n \to +\infty} \beta(\mu_n, \mu) = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3) Mq si $\beta(\mu_n, \mu) \to 0$

alors $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$

Conséquence de $\rho(\mu, \nu) \leq 2\sqrt{\beta(\mu, \nu)}$

On peut supposer $\mu \neq \nu \Rightarrow \beta(\mu, \nu) > 0$.

Posons $f_{F,\varepsilon}(x) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, F)\right)^+$ pour F fermé.

Notons que

$$\begin{cases} \|f_{F,\varepsilon}\|_{BL} \leq \underset{\|f_{F,\varepsilon}\|_\infty}{1} + \frac{1}{\varepsilon} \\ \mathbb{1}_F \leq f_{F,\varepsilon} \leq \mathbb{1}_{F^\varepsilon} \end{cases}$$

Constante de Lip

Donc $\mu(F) \overset{\text{monotonie}}{\leq} \mu(f_{F,\varepsilon})$

def de β $\leq \nu(f_{F,\varepsilon}) + (1+\frac{1}{\varepsilon})\beta(\mu,\nu)$

monotonie $\leq \nu(F^\varepsilon) + (1+\frac{1}{\varepsilon})\beta(\mu,\nu)$

$= \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon + \underbrace{(1+\frac{1}{\varepsilon})\beta(\mu,\nu) - \varepsilon}_{\eta}$

Ainsi par def de ρ :

$\rho(\mu,\nu) \overset{\text{Rappel}}{=} \inf\{\delta>0 \mid \forall F \text{ fermé}, \mu(F) \leq \nu(F^\delta) + \delta\}$

2 cas :

$$\begin{cases} \eta \leq \varepsilon \implies \mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \\ \qquad\quad \implies \rho(\mu,\nu) \leq \varepsilon \\ \eta > \varepsilon \implies \mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \eta \\ \qquad\qquad\qquad\quad \leq \nu(F^\eta) + \eta \\ \qquad\quad \implies \rho(\mu,\nu) \leq \eta. \end{cases}$$

Donc $\rho(\mu,\nu) \leq \max(\varepsilon,\eta)$

$= \max\left(\varepsilon, (1+\frac{1}{\varepsilon})\beta(\mu,\nu)\right)$

$\forall \varepsilon > 0$.

En posant $\varepsilon = 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)}$ on a :

$$\rho(\mu,\nu) \leqslant 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)} + \left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\beta(\mu,\nu) - 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)}\right)^+$$
$$= 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)} + \left(\beta(\mu,\nu) - \frac{3}{2}\sqrt{\beta(\mu,\nu)}\right)^+$$

Maintenant se souvenir que $\rho(\mu,\nu) \leqslant 1$.

- si $\underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{\beta(\mu,\nu)}} \geqslant 1/4$,

  alors $\rho(\mu,\nu) \leqslant 1 \leqslant 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)}$

  toujours vrai.

- si $\beta(\mu,\nu) \leqslant 1/4$; $x \longmapsto x^2 - \frac{3}{2}x$

  $\iff \sqrt{\beta(\mu,\nu)} \leqslant 1/2$ négatif sur $[0, 1/2]$

donc $\rho(\mu,\nu) \leqslant 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)} + \underline{\underline{0}}$

Dans tous les cas $\rho(\mu,\nu) \leqslant 2\sqrt{\beta(\mu,\nu)}$

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons $\rho(\mu_n,\mu) \to 0$

& mq $\mu_n \to \mu$ étroitement.

Par Portmanteau, il suffit de mq

$\forall F$ fermé, $\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$

Par hypothèse : $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \underbrace{\rho(\mu_n, \mu) \leq \varepsilon}$

$\forall F$ fermé, $\mu_n(F) \leq \mu(F^\varepsilon) + \varepsilon$

Donc pour F fermé fixé et $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F^\varepsilon) + \varepsilon$$

/!\ F fermé

$\bigcap_{\varepsilon > 0} B^\varepsilon = \overline{B}$

En prenant $\varepsilon \downarrow 0$, F^ε décroissant & $\mu(F^\varepsilon) \to \mu(F)$

$\square$

Exercice : $\mathcal{M}_1(E)$ métrisable par β ou ρ.

En admettant Prokhorov (+ Riesz), mq $(\mathcal{M}_1(E), \beta)$ métrique complet
$(\mathcal{M}_1(E), \rho)$ métrique complet.

Thm [Admis] Si E polonais Alors.

$\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la CV étroite est polonais

Fait intéressant : La réciproque est aussi vraie.