Cours M2Ri :

CV $\mathbb{P}$, thm lim,

& transport optimal

Séance 4

27 Septembre 2021

Thm [Portmanteau]

Soit $(\mu_n ; n \geq 1)$ suite sur $\mathcal{M}_1(E)$, $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ avec (E, d) métrique. On a alors équivalence :

1/ $\mu_n \to \mu$ étroitement

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\mu_n(f) := \int f(x) \, \mu_n(dx)$ $\forall f$ continue bornée

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(f) := \int f(x) \, \mu(dx)$$

2/ $\mu_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(f)$ $\forall f$ uniformément cont. bornée

3/ $\mu_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(f)$ $\forall f$ lipschitz bornée

4/ $\forall O \subset E$ ouvert, $\liminf\limits_{n \to +\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O)$

5/ $\forall F \subset E$ fermé, $\limsup\limits_{n \to +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

6/ $\forall A$ borélien, $\mu(\partial A) = 0$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$

7/ $\forall f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et μ-pp continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$$

Preuve : Les flèches $\begin{cases} \Rightarrow & \text{sont non-triviales} \\ \Rightarrow & \text{sont triviales.} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & (7) \arrow[ul, Rightarrow] & (6) \arrow[l, Rightarrow] & (5) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Démontrons seulement les $\Longrightarrow$

• $(3) \Rightarrow (5)$: On reprend la preuve de la proposition sur la régularité des mesures,

$$\mathbb{1}_F(x) \leq f_{F,K}(x) = (1 - K\, d(x, F))^+ \leq 1$$

$$\xrightarrow[K \to +\infty]{} \mathbb{1}_F(x) \quad \& \quad f_{F,K} \text{ lipschitz}$$

Donc
$$\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(F) \underset{\text{monotonie}}{\leq} \limsup_{n \to +\infty} \mu_n(f_{F,K}) \underset{\text{par } (3)}{=} \mu(f_{F,K}) \xrightarrow[K \to +\infty]{} \mu(F)$$
par CV monotone

On a bien : $\forall F$ fermé
$$\limsup_{n \to +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

• $(4) + (5) \Rightarrow (6)$:

en général

$$\mu(\partial A) = 0 \Longrightarrow \mu(\mathring{A}) \overset{\leq}{=} \mu(A) \overset{\leq}{=} \mu(\bar{A})$$

Donc $\mu(A) = \mu(\mathring{A})$

$$\underset{\text{par }(4)}{\leqslant} \liminf \mu_n(\mathring{A}) \overset{\text{monotonie}}{\leqslant} \liminf \mu_n(A)$$

$$\leqslant \limsup \mu_n(A) \overset{\text{monotonie}}{\leqslant} \limsup \mu_n(\bar{A})$$

$$\underset{\text{par }(5)}{\leqslant} \mu(\bar{A}) = \mu(A)$$

Donc égalité partout ! et donc $\mu(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(A)$

• (6) $\Rightarrow$ (7) Soit f mesurable bornée et μ-pp continue.

$f = f_+ - f_-$ $\rightsquigarrow$ On se ramène à $f \geqslant 0$.

Remarquons que $\forall \nu \in \mathcal{M}_1(E)$

$$\nu(f) = \int_0^{+\infty} \nu(\{f \geqslant y\})\, dy$$

En effet $\nu(f) = \int_E \nu(dx) f(x) = \int_E \nu(dx) \int_0^{f(x)} dy$

$$= \int \nu(dx) \int_0^{+\infty} dy\, \mathbb{1}_{\{y \leqslant f(x)\}}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} dy \int \nu(dx)\, \mathbb{1}_{\{y \leqslant f(x)\}}$$

$$= \int_0^{+\infty} dy\, \nu(\{f \geqslant y\})$$

Ainsi $\mu_n(f) = \int_0^{+\infty} dy\, \mu_n(\{f \geqslant y\})$

$$= \int_0^{\|f\|_\infty} dy \ \mu_n(\{f \geq y\})$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mu(f) \quad \text{par CV dominée}$$

(Lebesgue !)

POURVU QUE pour presque tout $y \geq 0$,

$$\mu_n(\{f \geq y\}) \longrightarrow \mu(\{f \geq y\})$$

En posant $A_y := \{f \geq y\} = \{x \in E \mid f(x) \geq y\}$,

il suffit de mq (par ⑥)

$$\mu(\partial A_y) = 0 \quad \text{pour presque tout } y \geq 0$$

↳ Posons D = Ensemble des points de discontinuité de f

$$= \{ x \in E \mid \exists x_n \to x, \ f(x_n) \not\to f(x) \}$$

(Exercice : C'est un borélien !). Par hyp, $\mu(D) = 0$.

↳ Mq $\partial A_y \subset \{f = y\} \cup D$

En 3 temps :

- $\overline{A_y} \subset A_y \cup D$:

Soit $x \in \overline{A_y}$ càd $\begin{cases} x = \lim x_n \\ x_n \in \{f \geq y\} \end{cases}$

Donc $f(x_n) \geq y$

ou bien $x \in D$ et donc $x \in A_y \cup D$

ou bien $x \notin D$ et donc x point de continuité. Donc $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq y$

Donc $x \in A_y$

In fine $x \in A_y \cup D$.

- $\mathring{A}_y^c \subset \{f \leq y\} \cup D \iff \{f > y\} \setminus D \subset \mathring{A}_y$

Soit $x \in \{f > y\} \setminus D$

Donc $\begin{cases} f(x) > y \\ x \text{ point de continuité} \end{cases}$

Par continuité, il existe V voisinage de x où $\forall x' \in V$, $f(x') \geq y$. D'où $\exists V$ voisinage de x, $V \subset A_y$ ie $x \in \mathring{A}_y$

- Intersect° des énoncés

$$\partial A_y = \overline{A_y} \setminus \mathring{A}_y = \overline{A_y} \cap (\mathring{A}_y)^c$$

$$\subset (A_y \cup D) \cap (\{f \leq y\} \cup D)$$

$$= (\{f \geq y\} \cup D) \cap (\{f \leq y\} \cup D) \subset \{f = y\} \cup D$$

$\Rightarrow$ $\mu(\partial A_y) \leq \underbrace{\mu(\{f = y\})}_{= ?} + \underbrace{\mu(D)}_{0 \text{ par hypothèse}}$

Est-ce 0 pour presque tout y ? Oui !

Si Oui $\rightsquigarrow$ $\mu(\partial A_y) = 0$ pour presque tout y.

En effet $\{ y \geq 0 \mid \mu(\{f = y\}) > 0 \}$

$$= \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\{ y \geq 0 \mid \mu(\{f=y\}) > 1/n \}}_{\text{fini } (< n)}$$

dénombrable donc Lebesgue négligeable

Autre point de vue : ce sont les atomes de la mesure image de μ par f, $f_* \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$.

$\boxtimes$

④ Retour sur $\mathbb{R}$ & $\mathbb{R}^k$

Le cas de $\mathbb{R}^k$ est riche en outils classiques que nous pourrons rapidement revisiter à la lumière de nos nouveaux outils.

Notations: $(k=1)$

$$F_\mu(x) = \mu(\mathbb{1}_{\{\cdot \leq x\}}) = \int_{-\infty}^{x} \mu_n$$ Fonct° de répartition

$$\varphi_\mu(t) = \int e^{itx} \mu_n$$

Fonct° caractéristique $\equiv$ Transformée de Fourier de μ

Proposition [Les fonctions de répartition caractérisent la CV étroite sur $\mathbb{R}$]
‖ la CV en loi

Soit $(\mu_n ; n \geq 1)$ suite dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$\mu_n \to \mu$ étroitement ssi $F_{\mu_n}(x) \longrightarrow F_\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ point de continuité de F_μ

Preuve : Remarquons
x point de discontinuité de F_μ $\Longleftrightarrow$ x atome de μ

$\boxed{\Rightarrow}$ Par le thm Portmanteau, 7^e propriété
et $f(y) = \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}$

On a : $F_{\mu_n}(x) = \mu_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(f) = F_\mu(x)$

pourvu que $\mathbb{1}_{\{y \leq x\}}$ soit $\mu(dy)$-pp continue.

Or $\{x\} = D$ ensemble de discontinuité

Donc $\mu(D) = 0 \Leftrightarrow x$ non atome de μ
c'est bien l'énoncé demandé.

Ex : Faire pareil avec $A_x =]-\infty, x]$

$\mu_n(A_x) \longrightarrow \mu(A_x)$ pourvu que $\mu(\partial A_x) = 0$
$$\overset{\shortparallel}{\mu(\{x\})}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $F_{\mu_n}(x) \longrightarrow F_\mu(x)$
$\forall x$ non atome de μ

alors $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$ pour tout $f = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbb{1}_{]a_i, b_i]}$

où a_i, b_i non atomes de μ (dénombrables).

Toute fonct° continue à support compact est limite uniforme de telles fonctions $\boxed{K}$

Aussi, sur $\mathbb{R}$, nous pouvons aussi démontrer l'implication intéressante de Prokhorov :

Proposit° [Prokhorov dans $\mathbb{R}$, l'implicat° intéressante]
(Tension $\Rightarrow$ Relative compacité)

Soit $(\mu_n ; n \geq 1)$ une suite tendue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists K_\varepsilon > 0, \; \sup \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-K_\varepsilon, K_\varepsilon]) \leq \varepsilon$$

Alors $\exists$ extract° ψ, $\mu_{\psi(n)} \longrightarrow \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ étroitement.

Preuve : Posons $\mu_{n,K} = \mathbb{1}_{[-K,K]} \mu_n$ mesure sur $[-K, K]$.

• Mq $\forall K > 1$, $\exists \varphi$ extract° tq $\mu_{\varphi(n),K} \to \mu_K$ étroitement ou vaguement (⚠ μ_K non nécessairement proba).

Pour cela, on utilise un argument d'extract° diagonal

$$\left(\mu_{n,K}(x \mapsto x^k) \,;\, n \geq 1\right)$$ suite bornée de moments $\forall k \geq 1$, $\forall K \geq 1$

Par Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$, nous pouvons extraire à tour de rôle pour que

$\mu_{\varphi_0(n),K}(1)$ CV

$\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_0(n),K}(x)$ CV

⋮

etc

$\leadsto$ $\mu_{\varphi(n),K} := \mu_{\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_0(n),K}$ extract°

telle que $\forall k \geq 1$, fixés, $\forall K \geq 1$, $\mu_{\varphi(n),K}(x^k) \longrightarrow m_{k,K}$ moment

$\leadsto$ En approximant $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ sur $[-K, K]$ uniformément par Stone-Weierstraß :

$$\forall K > 1, \quad \mu_{\varphi(n),K}(f) \longrightarrow \mu_K(f)$$

Necessairement μ_K mesure positive portée par $[-K, K]$

avec $\mu_K(1) \leq 1$ (Riesz)

- Par une nouvelle extract° diagonale :

$\mu_{\varphi_1(n), 1}$ CV vaguement sur tout compact de $[-1, 1]$

$\mu_{\varphi_2 \circ \varphi_1(n), 2}$ CV ——— $[-2, 2]$

$\vdots$

$\leadsto$ $\mu_{\psi(n)} := \mu_{\varphi_n \circ \dots \varphi_1(n), n}$ CV vaguement sur tout compact.

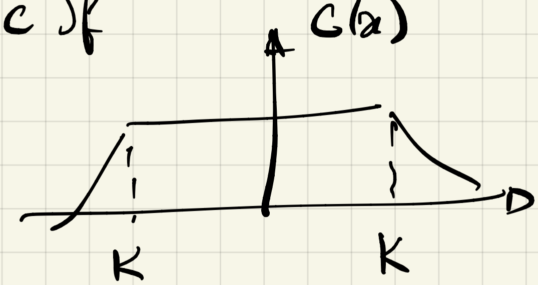
Ainsi $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\mu_{\psi(n)}(f) \longrightarrow \mu(f)$

- A priori $\mu(1) \leq 1$

Comment démontrer $\begin{cases} \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ \text{CV étroite} \end{cases}$? Tension !

$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $f = c f + (1 - c) f$

où $c = $ cst



$| \mu_{\psi(n)}(f) - \mu(f) | \leq |(\mu_{\psi(n)} - \mu)(fc)|$ $fc \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$+ |(\mu_{\psi(n)} - \mu)((1-c)f)|$

Donc

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \mu_{\psi(n)}(f) - \mu(f) \right|$$

$$\leqslant \limsup_{n \to +\infty} \left| (\mu_{\psi(n)} - \mu)\big((\mathbb{1} - c) f\big) \right|$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\limsup_{n \to +\infty} \Big[\mu_{\psi(n)}(\mathbb{R} \setminus [-K, K]) + \mu(\mathbb{R} \setminus [-K, K]) \Big]}_{\xrightarrow[K \to +\infty]{} 0}$$

par tension.

$\square$