Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

Séance 3

20 Septembre
2021

② La notion de tension et énoncé du thm de Prokhorov

Dans cette sous-section, nous introduisons la notion essentielle de ce chapitre, la tension et nous formulons le thm de Prokhorov qui démontre son utilité.
La preuve de Prokhorov viendra plus tard après une analyse fine de la topologie de $\mathcal{M}_1(E)$.

Def [Tension] : Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1(E)$ est dite tendue si

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \underset{K_\varepsilon(\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{K}} \subset E \text{ compact}, \quad \sup_{\mu \in \mathcal{F}} \mu(E \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Autrement dit, à précision $\varepsilon>0$ arbitraire, on peut trouver un seul compact K_ε en dehors duquel la masse attribuée par $\mathcal{F}$ est arbitrairement petite - pour cette précision initiale $\varepsilon>0$.

Proposition : Si E polonais
Alors $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ($\equiv \{\mu\}$ singleton) est tendue :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists K_\varepsilon \text{ compact}, \quad \mu(E \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

En particulier toute famille finie $\subset \mathcal{M}_1(E)$

est tendue.

Preuve : (Singletons tendus) $\Rightarrow$ (Familles finies tendues)

$\mathcal{F} = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Il suffit à $\varepsilon > 0$ fixé de prendre l'union FINIE $K_\varepsilon = \bigcup_i K_\varepsilon^{(i)}$ où $K_\varepsilon^{(i)}$ contient $1-\varepsilon$ de la masse de μ_i.

(un singleton est tendu). Soit $\varepsilon > 0$

E séparable $\Rightarrow \exists\, x_n$ suite dense

boule fermée

$$\Rightarrow \forall k \geq 1, \quad E = \bigcup_{n\geq 1} B_F(x_n ; 1/k)$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 1, \quad \exists\, N_k(\varepsilon) \geq 1,$$

Continuité de μ pour $\cup$ croissante

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_k(\varepsilon)} B_F(x_n ; 1/k) \right) \geq 1 - \varepsilon/2^k$$

Posons $$K_\varepsilon = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} B_F(x_n ; 1/k)$$

Montrons que K_ε fait l'affaire.

↳ Fermé de E et donc aussi complet.

↳ Compact : Rappelons que précompact + complet $\Rightarrow$ compact

Donc il suffit de mq K_ε précompact ie :

$$\forall \delta > 0, \quad \exists\, |I| < +\infty, \quad K_\varepsilon \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \delta).$$

ce qui est une évidence au vu de la définit° de K_ε.

↳ Tension ;

$$\mu(E \setminus K_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} B(x_n, 1/k) \right)^c \right)$$

$$\leq \sum_{k \geq 1} 1 - \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N_k(\varepsilon)} B(x_n, 1/k) \right)}_{\geq 1 - \varepsilon/2^k}$$

$$\leq \sum_{k \geq 1} \varepsilon/2^k = \varepsilon .$$

$\boxed{/\!/\!/}$

En fait, il n'est pas évident en général qu'une famille $\mathcal{F}$ infinie $\subset \mathcal{M}_1(E)$ est tendue.
Cette question est très importante en vertu de :

Thm [Prokhorov] E polonais.
Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_1(E)$. On a :

$\mathcal{F}$ tendue

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ relativement compacte ($\equiv$ fermeture) pour la topologie étroite

Remarque 1 : $\boxed{\Longrightarrow}$ Nécessitera polonais
$\boxed{\Longleftarrow}$ Ne le nécessitera pas.

Preuve en fin de chapitre.

Remarque 2 : Comme nous le verrons, la CV étroite est métrisable sur $\mathcal{M}_1(E)$, et nous exhiberons de telles métriques.
Ainsi la compacité sur $\mathcal{M}_1(E)$ est à comprendre

aussi bien au sens • de Borel-Lebesgue
• séquentiel pour d.

Ceci permettra d'appliquer

Proposition [schéma clé de preuve de CV dans $\mathcal{M}_1(E)$]

Soit $(\mu_n ; n \geq 1) \subset \mathcal{M}_1(E)$

Si • si $(\mu_n ; n \geq 1)$ famille tendue.

• $\exists \mu \in \mathcal{M}_1(E)$ tq pour toute sous-suite

CV $\mu_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu_n$ faiblement

Alors $\mu_n \to \mu$ faiblement.

Preuve : C'est un fait général sur tout espace métrique (X, d) + Remarque 2.

Fait : $(x_n ; n \geq 1)$ rel~~ati~~vement compact $\Rightarrow (x_n \to x)$

Unicité des valeurs d'adhérence

Sketch : ℓ valeur d'adhérence $(x_{\varphi(n)} \to \ell)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{ n \geq 1 \mid x_n \in B(\ell, \varepsilon) \}$ infini.

ℓ unique valeur d'adhérence

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon>0, & \{n\geq 1 \mid x_n \in B(\ell,\varepsilon)\} \text{ infini} \\ \forall \varepsilon>0, & \{n\geq 1 \mid x_n \in B(\ell,\varepsilon)^c\} \text{ fini} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x_n \to \ell.$$

3 Quelques propriétés de $\mathcal{M}_1(E)$ et de sa topologie

Commençons par quelques propriétés générales qui ne dépendent pas nécessairement du caractère polonais de E.

Proposition [Toute mesure de $\mathcal{M}_1(E)$ est régulière]

Soit $\begin{cases} E \text{ métrisable} \\ \mu \in \mathcal{M}_1(E). \end{cases}$ μ est entièrement déterminée, de façon équivalente, par ses valeurs sur les ouverts ou sur les fermés ou encore sur les fonctions lipschitziennes.

Plus précisément, pour tout A borélien

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert} \supset A\}$$
$$= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé} \subset A\}$$

Autrement dit : $\forall \varepsilon>0, \exists O$ ouvert, F fermé

$$\begin{cases} F \subset A \subset O \\ \mu(O)-\varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F)+\varepsilon \end{cases}$$

De plus si E polonais, on peut remplacer ?

"fermé" par "compact" dans l'intégralité de $\circledast$ l'énoncé.

Preuve: $\circledast$ Si E polonais alors μ est tendue (vu tout à l'heure).

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ compact, $\mu(E \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Donc si F fermé, $F \subset A$, $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$

Alors $F' = F \cap K_\varepsilon$ compact.

$\hookrightarrow F' \subset F \subset A$

$\hookrightarrow \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon = \mu(F \cap K_\varepsilon) + \underbrace{\mu(F \cap K_\varepsilon^c)}_{\leq \mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon} + \varepsilon$

$$\leq \mu(F') + 2\varepsilon.$$

Pour le reste : Soit $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bor}(E)$ l'ens. des parties boréliennes A de E telles que

$$\mu(A) \overset{①}{=} \inf \{ \mu(O) : O \text{ ouvert} \supset A \}$$
$$\overset{②}{=} \sup \{ \mu(F) : F \text{ fermé} \subset A \}$$

Etape 1: $\mathcal{A}$ contient les ouverts.

Si A ouvert alors ① est évident.

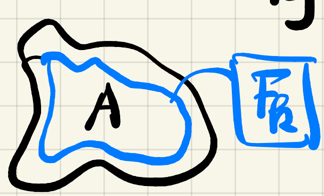
Mq $\mu(A)$ satisfait aussi ②.

d distance sur E

Posons pour $k \geq 1$, $F_k := \{ x \in E \mid d(x, A^c) \geq 1/k \}$

fermé par continuité de $d(\cdot, A^c)$.

De plus F_k suite croissante ave



$\bigcup_{k \geq 1} F_k = A$ (car A ouvert).

Donc $\mu(A) = \lim_{k \to +\infty} \mu(F_k) \leq \sup\{\mu(F) \mid F \subset A \text{ fermé}\}$

$\geq$ évident ($F \subset A$)

Etape 2 : $\mathcal{A}$ stable par complémentaire.

Si $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\mu(A^c) = 1 - \mu(A) = \begin{cases} 1 - \inf\{\mu(O) \mid \dots\} \\ 1 - \sup\{\mu(F) \mid \dots\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{1 - \mu(O) \mid \dots\} \\ \inf\{1 - \mu(F) \mid \dots\} \end{cases} = \begin{cases} \sup\{\mu(O^c) \mid \dots\} \\ \inf\{\mu(F^c) \mid \dots\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\{\mu(F) \mid F \text{ fermé } \subset A^c\} \\ \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert } \supset A^c\} \end{cases}$$

Etape 3 : Stabilité par $\cup$ ou $\cap$

Facile en utilisant $A \in \mathcal{A} \iff \forall \varepsilon > 0,\ F \subset A \subset O$, $\mu(O) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$

mais l'argument suivant est plus fort.

Etape 4 : Stabilité par $\cup$ dénombrable.

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ O_i, F_i$ ouvert, fermé tq

$F_i \subset A_i \subset O_i$ & $\mu(O_i) - \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \mu(A_i) \leq \mu(F_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\Rightarrow \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i O_i$ ouvert

et $\mu(\bigcup_i O_i) - \mu(\bigcup_i A_i) \leq \mu(\bigcup_i (O_i / A_i))$

$$\leq \sum_i \mu(O_i \setminus A_i)$$
$$= \sum_i \mu(O_i) - \mu(A_i)$$
$$\leq \sum_i \varepsilon/2^i = \varepsilon$$

Donc $\mu(\bigcup_i O_i) - \varepsilon \leq \mu(\bigcup_i A_i)$

MAIS $\underbrace{\bigcup_i F_i}_{\text{non nécessairement fermé}} \subset \bigcup_i A_i$.

Donc on prend un $N \in \mathbb{N}$ à choisir ultérieurement de façon à $\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} F_i}_{\text{fermé}} \subset \bigcup_i A_i$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i\right)$$
$$\leq \underbrace{\mu\left(\bigcup_i F_i \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i\right)}_{\leq \varepsilon \text{ pour } N \text{ assez grand}} + \underbrace{\mu\left(\bigcup_i A_i \setminus \bigcup_i F_i\right)}_{\leq \sum_i \mu(A_i \setminus F_i) \leq \sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \varepsilon}$$

$\leq 2\varepsilon$ pour $N \gg 1$.

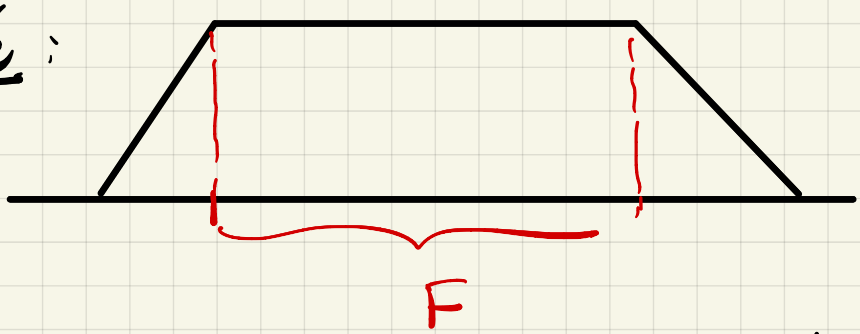
Donc $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Conclusion : $\mathcal{A}$ tribu contenant les ouverts

$\rightsquigarrow \mathcal{A} = \mathrm{Bor}(E)$.

Enfin μ déterminée par ses valeurs sur les fonctions lipschitziennes

Idée : F fermé



$$f_{K,F}(x) = (1 - K\, d(x,F))^+$$

Remarquons : • $\mathbb{1}_F(x) \leq f_{K,F}(x) \leq 1$

$$f_{K,F}(x) \xrightarrow[K \to +\infty]{} \mathbb{1}_F(x) \text{ ponctuellement}$$

• $f_{K,F}$ K-Lipschitz comme composée de fonctions lipschitz

Donc par CV dominée :

$$\mu(F) = \mu(\mathbb{1}_F) = \lim_{K \to +\infty} \mu(f_{F,K})$$

$\leadsto$ $\mu(F)$ déterminé par les $\mu(f_{F,K})$

$\leadsto$ μ déterminé en conséquent $\boxtimes$