Basic course 7 :

CV de mesures de $\mathbb{P}$, thms limites et transport optimal

13 Sept 2021

Plan

Partie 1 : CV de mesures de $\mathbb{P}$, thm limites

$\boxed{\text{I}}$ Préambule

$\boxed{\text{II}}$ CV dans $\mathcal{M}_1(E)$

$\mathcal{M}_1(E) \equiv$ Probas sur un espace E

E = Espace Polonais
= Espace métrizable complet et séparable.

__Thm clé__ : Le thm de Prokhorov, critère (pré)-compacité dans $\mathcal{M}_1(E)$

$\boxed{\text{III}}$ CV en loi dans $\mathcal{C}([0,T], E)$

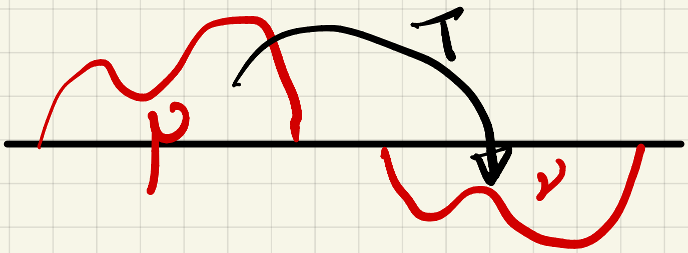
← fonctions continues

/ CV en loi des processus continus.

__Thm clé__ : Le thm d'invariance de Donsker.

Partie 2 : Transport optimal.

$\mu \in \mathcal{M}_1(X)$, $\nu \in \mathcal{M}_1(Y)$



$\exists$? $T : X \to Y$, $T_* \mu = \nu$?

$$\inf_{\pi,\ (p_1)_*\pi = \mu,\ (p_2)_*\pi = \nu} \mathbb{E}_\pi(c(X,Y))$$

Thms clés : Dualité de Kantorovich
/ Thm de Brenier.
($\pi \rightsquigarrow T$).

Autres thèmes possibles :

- Aspect algorithmiques : SinKhorn.
- Applicat° en ML.

Partie 1.

0 Notations

- $\mathcal{M}_1(E) \equiv$ Mesures de $\mathbb{P}$ sur E.
- $\mathcal{C}_c(E) \equiv$ Fonct° continues à support compact
  $\mathcal{C}_b(E) \equiv$ ——————————— bornées
- $\mathbb{E}(.) \equiv$ Espérance sous une $\mathbb{P}$ implicite
- Si X est une v.a à valeur dans E

alors on note $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{M}_1(E)$ la loi de X.

En particulier

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x)\, \mu(dx) \text{ où } \mu = \mathcal{L}(X).$$

$$\left(X : \Omega \longrightarrow E \right.$$
où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ triplet de l'espace probabilisé sous-jacent $)$

- Convergence en loi

$f : E \to \mathbb{R}$

$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \overset{\text{def}}{\iff} \forall f$ continue bornée

$\mathbb{E} f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

(X_n CV en loi vers $X \in E$)

⚠ Pour ce cours, nous ne sommes aucunement intéressés par les distinctions entre :

↳ CV étroite vs CV vague.

"Rappels" : Si μ_n suite de mesures <u>finies</u> sur $\mathbb{R}^d$

CV étroite : $\mu_n \to \mu$ étroitement lorsque

CV vague : vaguement

$\int f \mu_n \to \int f \mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_b$

$\forall f \in \mathcal{C}_c$.

Clairement CV étroite $\Rightarrow$ CV vague.

<u>Exercice</u> : CV vague & $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}) \Rightarrow$ CV étroite

↳ CV faible vs CV faible *

Si V espace topologique, $V^* =$ Formes linéaires continues

<u>"Rappels"</u> : Topologie faible (sur V)

$x_n \to x$ faiblement sur $V \iff \forall \ell \in V^*$, Topologie faible * (sur V^*)

$\langle \ell, x_n \rangle \longrightarrow \langle \ell, x \rangle$

$\ell_n \to \ell$ faiblement sur V^*

$\iff \quad \forall x \in V, \quad \langle \ell_n, x \rangle \to \langle \ell, x \rangle$

Dans un sens strict :

CV en loi $\equiv$ CV étroite restreinte à $\mathcal{M}_1(E)$

$\equiv$ CV vague sur $\mathcal{M}_1(E)$

vers des lim. dans $\mathcal{M}_1(E)$

$\equiv$ CV faible *

où $V = (\mathcal{C}_0(E), \|\cdot\|_\infty)$

$V^* = \mathcal{M}_1(E)$.

(restreint aux probas).

I Préambule : Du TCL multivarié au mouvement brownien.

$X_1, X_2, \dots$ variables aléatoires iid $\mathbb{E}(X_1) = 0$

$\mathbb{E}(X_1^2) = 1$

$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$

Thm [TCL] $\quad \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Preuve n°1 : Par les fonctions caractéristique

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\frac{tX_1}{\sqrt{n}}}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n}(1+o(1))\right)^n$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2} = \mathbb{E}(e^{itG})$$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int e^{itx} \mu_n(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(t) = e^{-t^2/2}$

où $\mu_n = \mathcal{L}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$

Nous invoquons le critère de Lévy :

Thm [Critère de Lévy]

Si μ_n suite dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

avec $\begin{cases} \forall t, \quad \int e^{itx}\mu_n(dx) \to \varphi(t) & \left(\begin{smallmatrix}\text{cv}\\ \text{ponctuelle}\end{smallmatrix}\right) \\ t \mapsto \varphi(t) \text{ continue en } 0 \end{cases}$

⚠ Détail souvent oublié

Alors $\exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) = \int e^{itx}\mu(dx)$.

et $\mu_n \to \mu$ faiblement.

⚠ La continuité en 0 est capitale.

Elle cache comme on le verra :

$t \mapsto \varphi(t)$ continue en 0

cf preuve $\iff$ à venir $\quad \limsup_{K\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \mu_n(\mathbb{R}\setminus[-K,K]) = 0$

Prokhorov $\Longleftrightarrow$ à venir $\quad (\mu_n,\ n \geq 1)$ précompact dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

Preuve n°2 : Le "swapping trick" de Lindberg.

On supposera $\mathbb{E}|X_1|^3 < +\infty$.

Etape 1 : Si les X_i sont Gaussiens, $X_i = \mathcal{N}_i$

c'est trivial : $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i}{\sqrt{n}} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0,1) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Etape 2 : Démontrons que si $\varphi \in \mathcal{C}^3$ à support compact

$$\mathbb{E}\, \varphi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}\, \varphi(\mathcal{N}).$$

Pour cela, on considère sur le même espace de proba $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de v.a. gaussiennes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots$

$\mathcal{N} \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j = S_n^{\mathcal{N}}$ par étape 1.

Définissons $\quad S_n^i = \left(\sum_{j=1}^{i} X_j + \sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{N}_j\right)$

Remarquons : $\begin{cases} S_n = S_n^n \\ S_n^{\mathcal{N}} = S_n^0 \end{cases}$

$$\sum_{j=1}^{i-1} X_j + \sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{N}_j$$
$$\parallel$$

Aussi $\quad S_n^{i+1} = \hat{S}_n^i + X_{i+1} \quad$ avec $\hat{S}_n^i \perp\!\!\!\perp (X_{i+1}, \mathcal{N}_{i+1})$

$\qquad S_n^i = \hat{S}_n^i + \mathcal{N}_{i+1}$

Par somme télescopique :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \varphi(\mathcal{N})\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{S_n^n}{\sqrt{n}}\right) - \varphi\left(\frac{S_n^0}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{S_n^{i+1}}{\sqrt{n}}\right) - \varphi\left(\frac{S_n^i}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{\hat{S}_n^i + X_{i+1}}{\sqrt{n}}\right) - \varphi\left(\frac{\hat{S}_n^i + \mathcal{N}_{i+1}}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

Taylor

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\Bigg[\varphi'\left(\frac{\hat{S}_n^i}{\sqrt{n}}\right) \perp \left(\frac{X_{i+1} - \mathcal{N}_{i+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi''\left(\frac{\hat{S}_n^i}{\sqrt{n}}\right) \perp \left(\frac{X_{i+1}^2 - \mathcal{N}_{i+1}^2}{n}\right)$$

$$+ O(|\varphi'''|_\infty)\frac{(|X_{i+1}|^3 + |\mathcal{N}_{i+1}|^3)}{n^{3/2}}\Bigg]$$

$$= O(|\varphi'''|_\infty) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}\left[|X_{i+1}|^3 + |\mathcal{N}_{i+1}|^3\right]}{n^{3/2}}$$

$$= O(|\varphi'''|_\infty)\ \mathbb{E}\left[|X_1|^3 + |\mathcal{N}_1|^3\right]/\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Étape 3 : Par densité de $\mathcal{C}_c^3$ dans $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

$\rightsquigarrow$ On peut promouvoir la CV $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ à $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

Etape 4 : Le passage de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ à $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

cache une petite subtilité

Exercice :

- Mq $\limsup_{K \to +\infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| \geq K \right) = 0$

(Indice : Markov)

⚠ Prokhorov dit que c'est la précompacité !

- Conclure :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \mathbb{E} f(\mathcal{N})$$

$\blacksquare$

Ainsi par ces 2 preuves classiques nous avons motivé l'intérêt de la précompacité dans $\mathcal{M}_1(E)$ lorsque $E = \mathbb{R}$.

Maintenant illustrons cette importance pour $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.

Le TCL multidimentionnel donne :

Thm : Si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$

alors $\left(\frac{S_{\lfloor n t_j \rfloor}}{\sqrt{n}} ; \quad 1 \leq j \leq k \right)$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\sum_{i=1}^{j} \sqrt{t_i - t_{i-1}}\, \mathcal{N}_i \,;\, 1 \leq j \leq k \right)$$

$$\text{où } \mathcal{N}_i \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0,1)$$

De façon équivalente

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt_j \rfloor} - S_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor}}{\sqrt{n}} \,;\, 1 \leq j \leq k \right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\sqrt{t_j - t_{j-1}}\, \mathcal{N}_j \,;\, 1 \leq j \leq k \right)$$

Et si nous regardons la famille de variables aléatoires $\left(\cancel{\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}} \,;\, t \geq 0 \right)$, nous avons

$\leftrightarrow S_t^{[n]} \equiv$ Interpolat° affine par morceaux de $S_{\lfloor nt \rfloor}$

envie tout de même d'énoncer un thm. limite.

Voici maintenant un objet fondamental en $\mathbb{P}$ moderne décrit mathématiquement

par Bachelier (1900, thèse de doctorat "Théorie de la spéculat°")

par Einstein (1905, Physique des particules).

par Wiener (1930 —, Traitement du signal).

Définition : Un mouvement brownien 1d est une famille de v.a $(B_t \,;\, t \geq 0)$ indexée par $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $B_0 = 0$
- $t \mapsto B_t$ est p.s continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}},\ 1 \leq i \leq k)$

incréments indépendants de loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$

A ce titre, on peut dire que

$B_\cdot$ est une v.a. à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.

⚠ A ce stade, l'existence n'est pas évidente.

La question est donc de promouvoir le TCL multivarié précédent en

$$\left(\frac{S_t^{[n]}}{\sqrt{n}},\ t \geq 0 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_t,\ t \geq 0)$$

cette CV ayant lieu sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+))$

Ainsi on aurait $\forall F$ continue bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{S_t^{[n]}}{\sqrt{n}} \right) \right] \longrightarrow \mathbb{E} F(B_\cdot)$$

Par exemple

$\forall f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\forall T > 0$

$$\mathbb{E}\, f\left(\frac{S_T^{[n]}}{\sqrt{n}} , \operatorname{Arctan} \int_0^T \frac{S_s^{[n]}}{\sqrt{n}} ds , 2 \sup_{0 \leq t \leq T} S_t^{[n]} - S_T^{[n]} \right)$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}\, f\left(B_T , \operatorname{Arctan} \int_0^T B_s ds , 2 \sup_{0 \leq t \leq T} B_s - B_T \right)$$