Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

Séance 11

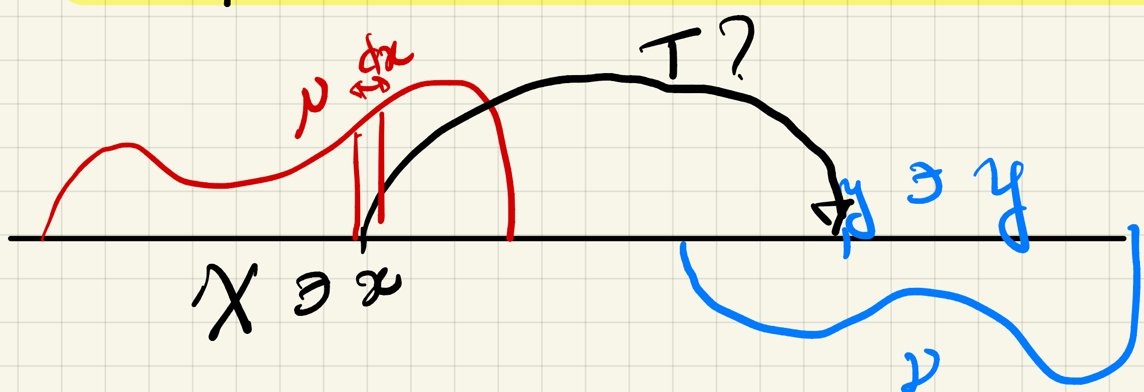
25 Octobre
2021

Partie 3 : Une introduct° au transport optimal

I Présentat° des objectifs.

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces polonais (penser ouverts de $\mathbb{R}^n$).

* Le problème historique de Monge.



Soit $c : \begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\} \\ (x,y) & \longmapsto & c(x,y) \end{array}$ fonct° de coût.

Le but est de transporter une distribut° de masse μ sur une autre ν ; en minimisant le coût c.

Il en découle un certain nombre de contraintes naturelles (/!\ Modélisat°)

↳ $\mu(\mathcal{X}) = \nu(\mathcal{Y})$. En normalisant à 1 on a ; $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X})$; $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{Y})$.

$\hookrightarrow$ $T_* \mu = \nu$ si $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est l'applicat° de transport ($T_*\mu$ = mesure image)

Donc

Monge (1781 "Mémoire sur la théorie des déblais & des remblais")

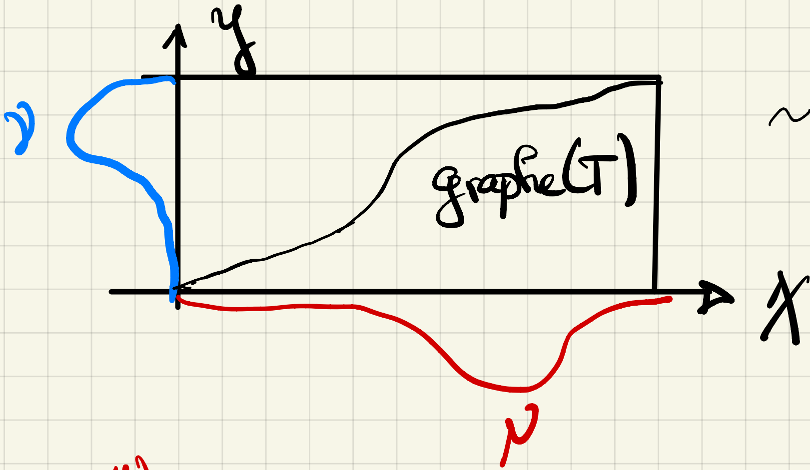
$$W_c^{\text{Monge}}(\mu, \nu) := \inf_{T : T_*\mu = \nu} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx)\, c(x, T(x))$$

Le problème de Monge est une optimisat° sous contraintes non-linéaires. De ce point de vue, le problème de Monge semble difficile à résoudre.

* La relaxat° de Kantorovich :

En 1942, Kantorovich proposa une relaxat° dans un papier "On the translocat° of masses" à l'académie des sciences de l'URSS (Doklady).

Idée : Permettre le "splitting" de masse.

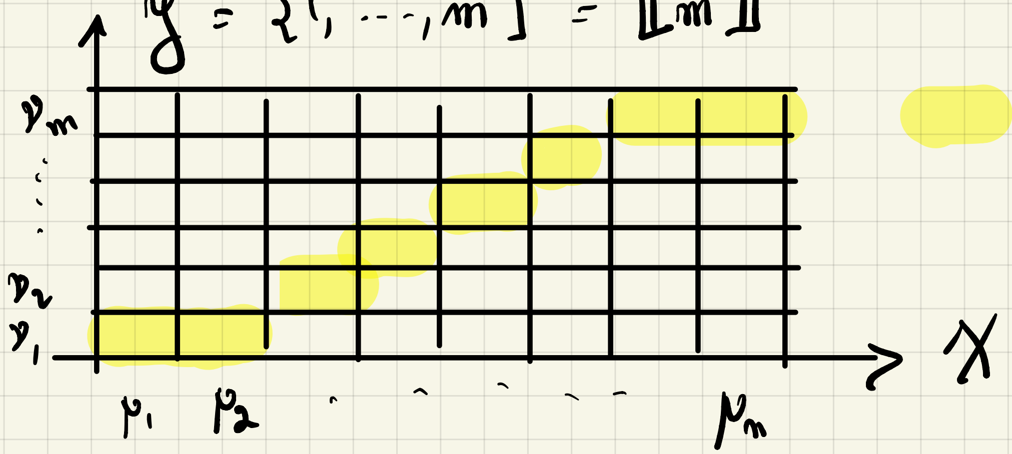


$\rightsquigarrow$ Mesure naturelle sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

$$\pi(dx, dy) = \mu(dx)\, \delta_{\{T(x)\}}(dy)$$

⚠ En discret très instructif :

$\mathcal{Y} = \{1, \dots, m\} = [\![m]\!]$



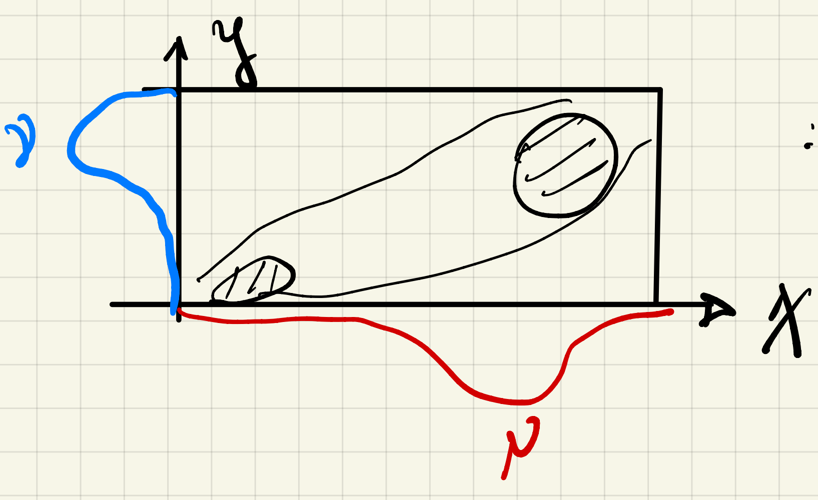
= graphe de T

$\mathcal{X} = [\![n]\!] = \{1, \dots, n\}$

Nécessairement

$$\forall j \in [\![m]\!], \quad \nu_j = \sum_{i : T(i) = j} \mu_i \qquad \left(\text{c'est juste } T_* \mu = \nu \right)$$

C'est bien moins général que de considérer

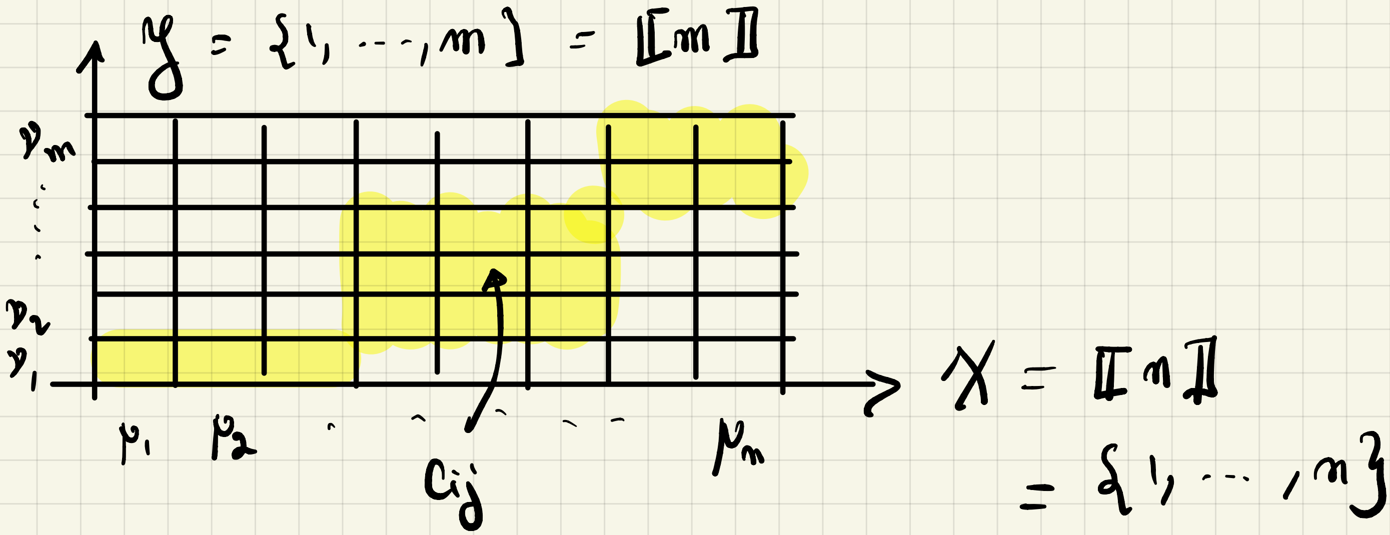


$$\Pi(\mu, \nu) := \{ \pi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \mid (P_1)_* \pi = \mu, \ (P_2)_* \pi = \nu \}$$

$$= \mathcal{L}[(X, Y)]$$

où $\mathcal{L}(X) = \mu$, $\mathcal{L}(Y) = \nu$

⚠ Le discret est toujours aussi instructif



Nécessairement

$$\forall i \in [\![n]\!], \quad \mu_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}$$

$$\forall j \in [\![m]\!], \quad \nu_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}$$

Ainsi

Problème de Kantorovich

$$W_c(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x,y)\, \pi(dx, dy)$$

$$= \inf_{\substack{\mathcal{L}(X) = \mu \\ \mathcal{L}(Y) = \nu}} \mathbb{E}\, c(X, Y)$$

Clairement $W_c^{\text{Monge}}(\mu, \nu) \geqslant W_c(\mu, \nu)$

car l'optimisat° pour le pb de Monge se fait sur un espace plus petit :

$$\underbrace{\{ \mu(dx)\, \delta_{\{T(x)\}}(dy) \}}_{\text{Applicat° de transport}} \subseteq \underbrace{\Pi(\mu, \nu)}_{\text{Couplages / Plans de transport}}$$

Rmk : $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \mu(dx)\, c(x, T(x))$

$$= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \underbrace{\mu(dx)\, \delta_{T(x)}(dy)}_{\pi(dx,dy)}\, c(x,y)$$

Plan de transport venant d'une applicat° de transport.

De façon informelle, visible surtout au niveau discret, Kantorovich permet le "splitting" des masses $(\mu_i\ ;\ 1 \leq i \leq n)$ et restaure la symétrie entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

Aussi Kantorovich relâche les contraintes non-linéaires de Monge en des contraintes linéaires.

<u>Remarque</u>: Gain conceptuel considérable car le problème de Kantorovich est

- linéaire en π.
- $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ convexe, obtenue par contrainte linéaire sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$.

De ce point de vue, il semble bien plus facile de résoudre Kantorovich que Monge

<u>Exemple</u>: (Masse de Dirac)

$\nu = \delta_a$ (ou $\mathcal{Y} = \{a\}$)

Alors problème de Monge et de Kantorovich coïncident avec

$$W_c(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int c(x, y)\, \pi(dx, dy)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} c(x, a)\, \mu(dx)$$

* Exemple important: Espaces discrets et masses identiques

$\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y} \simeq [\![n]\!]$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{y_j}$$

$\rightsquigarrow \pi \in \Pi(\mu, \nu)$ de la forme

$$\pi = \left(\frac{1}{n} \pi_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} (p_1)_* \pi = \mu \\ (p_2)_* \pi = \nu \end{cases} \iff \frac{1}{n} = \sum_j \frac{\pi_{ij}}{n} \iff 1 = \sum_i \pi_{ij}$$

$$= \sum_i \frac{\pi_{ij}}{n} \qquad = \sum_j \pi_{ij}$$

$\iff \pi \in \mathcal{B}_n =$ Matrices $n \times n$ bistochastiques

Donc $W_c(\mu, \nu) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} c(x_i, y_j) \pi_{ij} \;\middle|\; \pi \in \underline{\underline{\mathcal{B}_n}} \right\}$

On peut encore grandement expliciter.

⚠ convexe compact

<u>Exos</u> : Thm de Choquet
Thm de Birkhoff
} cf Villani. Intro.

Par le thm de Choquet, la minimisat° sur le convexe borné $\mathcal{B}_n$ de la forme linéaire

$\pi \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} c(x_i, y_j)\, \pi_{ij}$ est atteinte

sur des points extremaux $\in \mathrm{ext}(\mathcal{B}_n)$

$\mathrm{ext}(\mathcal{B}_n) \equiv$ Points extremaux

$$\equiv \left\{ x \in \mathcal{B}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ ne peut s'écrire} \\ x = \lambda y + (1-\lambda) z \\ (x,y) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n,\ \lambda \in]0,1[\end{array} \right\}$$

Par le Thm de Birkhoff : $\mathrm{ext}(\mathcal{B}_n) = \mathfrak{S}_n$

Donc $W_c(\mu, \nu) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{\sigma(i)})$

connu sous le nom de

"Matching Problem" / "Problème d'affectat° optimale"

Solut° algorithmique en $O(n^3)$
appelé "Algorithme hongrois"
ou encore "Algorithme de Kuhn-Munkres"
(cf Wikipedia)

⚠ Bcp trop lent pour une utilisat° systématique ... Il y a bien mieux aujourd'hui : Sinkhorn.

Exercice : Du "transport optimal" se cache derrière la distance de Lévy-Prokhorov.

Dans ce cours, nous nous intéressons aux questions :

$\boxed{Q}$ Est-ce que le problème de Kantorovich est bien posé ? Admet-il une solut° π^* ?

$\leadsto$ Dualité (convexe) de Kantorich.

$\boxed{Q}$ Peut-on déduire une applicat° de transport T^* à partir d'un plan de transport optimal π^* ?

Càd quand le pb de Kantorovich et le pb de Monge coïncident ?

$\rightsquigarrow$ Théorème de Brenier.

$\boxed{Q}$ Calcul effectif ? Sinkhorn.