Cours M2Ri :

CV II, thm lim,

& transport optimal

Séance 8

11 Octobre 2021

Partie II : Théorèmes limites fonctionnels

1 Énoncés / objectifs

Dans cette partie, nous fixons un horizon en temps $T > 0$.

$\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,T]; E)$ sera l'espace d'intérêt pour $E = \mathbb{R}^d$ ou plus généralement E polonais.

Remarquons

Lemme : Si E polonais alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,T]; E)$ muni de la topologie uniforme est polonais.

Preuve : Métrisable et complet : classique.

Pour la séparabilité, deux arguments :

↳ **Abstrait** : Stone - Weierstraß. $E \hookrightarrow \mathcal{C}(\overset{\text{compact}}{K})$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,T]; E) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T], \mathcal{C}(K)) \simeq \mathcal{C}(\overbrace{[0,T]\times K}^{\text{compact}})$$

$\exists\, \mathcal{A}$ algèbre dénombrable dense en séparant les points (cf preuve de Prokhorov).

↳ **Constructif** : Si $E = V$ espace vectoriel, utiliser

les fonctions • affines par morceaux sur les grilles $[0,T] \cap (\mathbb{Z} \cdot T/n)$
• à valeurs dans une famille dénombrable dense.

Sinon injecter E dans un espace de fonct°.

Par conséquent, la partie I de ce cours ☒ indique que $\mathcal{C}$ est un espace tout à fait légitime pour construire des mesures de proba $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$.

Enonçons deux thms qui sont l'objectif de cette partie. Le premier concerne l'un des objets les plus importants des probabilités modernes :

Thm [Existence et unicité du mouvement brownien]
$E = \mathbb{R}^d$

Il existe une unique mesure $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ telle que si $\mathcal{L}(X) = \mathbb{W}$ (X v.a. de loi $\mathbb{W}$)

- $X_0 = 0$
- $t \mapsto X_t$ est p.s continu ie $X \in \mathcal{C}$
- $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} ; 1 \leq i \leq k)$ incréments indépendants de loi $\mathcal{N}(0; (t_i - t_{i-1}) I_d)$

On nomme $\mathbb{W}$ la mesure de Wiener et tout X tel que $\mathcal{L}(X) = \mathbb{W}$ est appelé mouvement brownien standard.

Remarques : • On dit souvent que le mvt brownien est la gaussienne (infinie dim !) sur l'espace des chemins.

• La généralisat° à $\mathbb{R}^d$ est immédiate.

• Processus (continu) $\equiv$ Toute variable aléatoire dans $\mathcal{C}$.
(ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; E)$).

Le mouvement brownien est non seulement une brique de base pour construire d'autres processus intéressants. Il est aussi universel

Soit $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ une suite v.a. iid $\mathbb{E}\xi_1 = 0$
$\mathbb{E}\,\xi_1^2 = 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad \text{somme partielle}$$

$$S_t^{[n]} = \text{Interpolat° affine par morceaux de } \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{(S_{\lfloor tn \rfloor + 1} - S_{\lfloor nt \rfloor})}{\sqrt{n}}$$

Thm [TCL fonctionnel, Principe d'invariance de Donsker].

On a la CV en loi :

$$\left(S_t^{[n]} \, ; \, 0 \leq t \leq T \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(X_t \, ; \, 0 \leq t \leq T \right)$$

où X est un mvt brownien

De façon équivalente

$$\mathcal{L}\left(S^{[n]} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{W} \quad \text{étroitement.}$$

Remarques :

- Cette CV a également lieu pour $\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \, ; \, 0 \leq t \leq T \right)$ pour l'espace $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ pour discontinus) des fonctions càdlàg (continues à droite et limites à gauche)

  $\rightsquigarrow$ cf Billingsley, hors cours.

- Nous donnerons une preuve qui n'utilisera pas les hypothèses minimales $\mathbb{E}\, \xi_1^2 < \infty$.
Par ex $\mathbb{E}\, \xi_1^{2+\varepsilon} < +\infty$.

(2) Marginales et tribu produit

Notons que $\mathcal{C}$ est un espace muni d'applicat° naturelles de projection

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad \pi_t : \mathcal{C} = \mathcal{C}([0,T];E) \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto f(t)$$

Def : Si $\begin{cases} X \text{ est un processus continu} \\ 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq T \end{cases}$

alors $\mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k})$ s'appelle une marginale k-dimensionnelle ou encore marginale fini-dim.

Ecrit autrement si $\mathcal{L}(X) = \mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$

alors $\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) = (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \ldots, \pi_{t_k})_* \mu$

mesure image

Rappelons que $\mathcal{C}$ est muni de la tribu borélienne $Bor(\mathcal{C})$, engendrée par les ouverts de la topologie uniforme

Une autre tribu tout aussi naturelle

Def : [Tribu produit ou cylindrique]

$$\mathcal{Cyl}(\mathcal{C}) = \sigma(\pi_t \, ; \, 0 \leq t \leq T)$$

$=$ Tribu engendrée par les $\pi_t^{-1}(A)$ pour $0 \leq t \leq T$, $A \in Bor(E)$

Thm : Tribu borélienne et tribu produit coïncident

$$Bor(\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,T]; E)) = \mathcal{Cyl}(\mathcal{C}).$$