Cours M2Ri :

CV II , thm lim ,

& transport optimal

séance 10

18 Octobre 2021

③ Preuve des énoncés

3.1. Preuve de l'existence et unicité de $\mathbb{W}$

• Unicité : Vu en partie I-②. Toute loi sur $\mathcal{C}$ est uniquement determinée par les marginales.

$\leadsto$ Il existe au plus une telle mesure $\mathbb{W}$.

• Existence : Il suffit d'exhiber une construct° de $\mathbb{W}$. Par ex, il y a la construction classique en série de Schauder dûe à Lévy

Si $(s_i^k \,;\, k \geq 1 \,;\, 0 \leq i < 2^i)$ base de Schauder i.e.

$$s_k^n(t) = \int_0^t \psi_{n,k}(s)\,ds \quad \& \quad \psi_{n,k}(t) = 2^{n/2}\,\psi(2^n t - k)$$

$$\& \quad \psi(t) = \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{]\frac{1}{2};1]}$$

$\mathcal{N}_i^k$ iid Gaussiennes

Alors

$$X_t = \mathcal{N}_0^0 . t + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^{2^i - 1} \mathcal{N}_i^k \, s_i^k\left(\frac{t}{T}\right)\sqrt{T}$$

est un MB standard

Preuve : Vue en cours de Calcul Stochastique.

Mq
- X limite uniforme de f° continues $\rightsquigarrow t \mapsto X_t$ continue p.s
- X Gaussien, donc vérifier juste
$\mathbb{E}\, X_t X_s = t \wedge s \quad \forall\ (t,s) \in [0,T]^2$.

$\mathcal{L}(X) \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ avec les bonnes propriétés

3.2. Preuve de Donsker :

$$\mathcal{L}\left(S_t^{[n]},\ 0 \leq t \leq T \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{W}$$

$\iff \begin{cases} (\mu_n,\ n \geq 1) \text{ tendu} & (T \equiv \text{Tension}) \\ \text{CV des lois fini-dim pour toute val. d'adh} & (I = \text{Identificat}^\circ) \end{cases}$

(I) : Pour l'identificat°, il suffit de mq

$$(\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_m})^* \mu_n = \mathcal{L}\left(S_{t_1}^{[n]}, \dots, S_{t_m}^{[n]} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{L}\left(X_{t_1}, \dots, X_{t_k} \right)$$

où X MB

De façon équivalente, il suffit de mq

$\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$

$$\left(S_{t_i}^{[n]} - S_{t_{i-1}}^{[n]} ;\ 1 \leq i \leq k \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\sqrt{t_i - t_{i-1}}\, \mathcal{N}_i ;\ 1 \leq i \leq k \right)$$

C'est juste le TCL !

Exercice : $S^{[n]}_{t_i} - S^{[n]}_{t_{i-1}} = \dfrac{S_{\lfloor t_i n\rfloor} - S_{\lfloor t_{i-1} n\rfloor}}{\sqrt{n}} + \dfrac{\text{qq chose}}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{\sum_{k=\lfloor t_{i-1} n\rfloor+1}^{\lfloor t_i n\rfloor} \mathcal{P}_k}{\sqrt{n}} + \frac{\text{QQ chose}}{\sqrt{n}}$$

se convaincre que la partie interpolat° ne compte pas.

(T) : Pour la tension, nous invoquons le critère de Kolmogorov

Thm [Critère de Kolmogorov] ($E = \mathbb{R}^d$)

Posons $N_\alpha(f) = \sup_{\substack{(s,t)\in[0,T] \\ s\neq t}} \dfrac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$ norme de Hölder d'exposant α.

Soit $(X_n ; n\geq 1)$ suite de v.a. dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,T];E)$

Si $\begin{cases} (X_n(0) ; n\geq 1) \text{ tendu} \\ \exists\, p, C, \beta > 0,\ \mathbb{E}\,|X_n(t) - X_n(s)|^p \leq C|t-s|^{1+\beta} \end{cases}$

Alors $(X_n ; n\geq 1)$ tendu

Plus précisément, on a alors $\forall\, 0<\alpha<\beta/p$, $(N_\alpha(X_n) ; n\geq 1)$ tendu.

<u>Rmk:</u> $(N_\alpha(X_n)\ ;\ n \geq 1)$ tendue

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_\alpha(X_n) \geq M) \leq \varepsilon.$$

Appliquons le critère de Kolmogorov pour $\begin{cases} X_n = S^{[n]} & \text{la marche aléatoire} \\ p = 4 \end{cases}$

<u>Intuit°</u> : $p = 2$ ne marchera pas - même si à priori plus agréable car calcul de variance.

<u>Rappel:</u>
$$S_t^{[n]} = \frac{S_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n}} + \frac{tn - \lfloor tn \rfloor}{\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor tn \rfloor + 1} - S_{\lfloor tn \rfloor} \right)$$
$$= \frac{S_{\lceil tn \rceil}}{\sqrt{n}} + \frac{\lceil tn \rceil - tn}{\sqrt{n}} \left(S_{\lceil tn \rceil - 1} - S_{\lceil tn \rceil} \right)$$

Calculons maintenant pour $s < t$ et n fixé :
$$\mathbb{E} \left| S_t^{[n]} - S_s^{[n]} \right|^4$$

Plusieurs cas :
- $\exists k \in \mathbb{N},\quad sn \leq k < tn$
- Facile $4u$ $\exists k \in \mathbb{N},\quad k \leq sn < tn \leq k+1$

Dans le premier :

$$|S_t^{[n]} - S_s^{[n]}| \leqslant \frac{|S_{\lfloor tn \rfloor} - S_{\lceil sn \rceil}|}{\sqrt{n}}$$

$$+ \frac{|tn - \lfloor tn \rfloor|}{\sqrt{n}} |\xi_{\lfloor tn \rfloor + 1}| + \frac{|\lceil sn \rceil - sn|}{\sqrt{n}} |\xi_{\lceil sn \rceil}|$$

Or $\forall p \geqslant 1$, $\forall k \geqslant 1$, $\forall$ $a_i > 0$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{\,p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right)^p \leqslant p \sum_{i=1}^{k} a_i^p$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=\lceil sn \rceil + 1}^{\lfloor tn \rfloor} \xi_k \right)^4 = \mathbb{E}|\xi_1|^4 (\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil) + (\mathbb{E}|\xi_1|^2)^2 \frac{(\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil) \times (\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil - 1)}{2}$$

$$\mathbb{E}|S_t^{[n]} - S_s^{[n]}|^4$$

$$\leqslant \frac{4}{n^2} \Big[\underbrace{\mathbb{E}|S_{\lfloor tn \rfloor} - S_{\lceil sn \rceil}|^4}$$

$$+ |tn - \lfloor tn \rfloor|^4 \, \mathbb{E}\, \xi_1^4$$

$$+ |\lceil sn \rceil - sn|^4 \, \mathbb{E}\, \xi_1^4 \Big]$$

$$\leqslant \frac{C_\xi}{n^2} \Big[\frac{1}{2} (\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil) + \frac{1}{2} (\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil)(\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil \cancel{-1})$$

$$+ |tn - \lfloor tn \rfloor|^4 \leqslant |tn - \lfloor tn \rfloor|^2$$

$$+ \underbrace{|\lceil sn \rceil - sn|^4}_{\leqslant |\lceil sn \rceil - sn|^2} \Big]$$

$$\leqslant \frac{C_\xi}{n^2} \Big[(\lfloor tn \rfloor - \lceil sn \rceil)^2 + |tn - \lfloor tn \rfloor|^2 + |\lceil sn \rceil - sn|^2 \Big]$$

$$\leq \frac{C_\xi}{n^2}\left(\cancel{\lfloor tn \rfloor} - \lceil sn \rceil + tn - \cancel{\lfloor tn \rfloor} + \lceil sn \rceil - sn\right)^2$$

$$= \frac{C_\xi}{n^2}(tn - sn)^2 = C_\xi (t-s)^2$$

Le critère de Kolmogorov est satisfait pour $p=4$, $\beta = 1 > 0$, $C = C_\xi > 0$.

Donc $(S^{[n]}\, ; n \geq 1)$ tendu.

Remarque importante : En appliquant Kolmogorov à $X_n = X$ mouvement brownien :

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p = \mathbb{E}\left|\sqrt{t-s}\,\mathcal{N}\right|^p$$

$$= |t-s|^{p/2}\, \mathbb{E}|\mathcal{N}|^p$$

$$\overset{?}{=} C_p\, |t-s|^{1+\beta} \quad \text{avec } \beta = \frac{p}{2} - 1$$

Ainsi $N_\alpha(X)$ tendu et donc fini p.s

$$\forall\, 0 < \alpha < \frac{\beta}{p} = \frac{\frac{p}{2}-1}{p} = \frac{1}{2} - 1/p$$

Donc pour X MB, $N_\alpha(X) < +\infty \quad \forall\, \alpha < \frac{1}{2}$

$\leadsto$ $\frac{1}{2} - \varepsilon$ Hölder $\forall\, \varepsilon > 0$.

(4) Preuve du critère de Kolmogorov

$E = \mathbb{R}^d$ avec $d=1$

Sans perte de généralité, on peut supposer $T=1$.

Mq $\begin{cases} (X_n(0) \,;\, n \geqslant 1) \text{ tendu} \\ (N_\alpha(X_n) \,;\, n \geqslant 1) \text{ tendu} \end{cases} \Longrightarrow (X_n \,;\, n \geqslant 1)$ tendu.

Par def, $(X_n \,;\, n \geqslant 1)$ tendu

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \; \exists K \subset \mathcal{C}$ compact, $\sup_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X_n \in K^c) \leqslant \varepsilon$.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$

Par Ascoli-Arzela, un compact $K \subset \mathcal{C}$ est caractérisé par :

- la bornitude en 0 : $\exists M > 0, \forall f \in K, \; |f(0)| \leqslant M$
- l'équicontinuité : $\sup_{f \in K} \omega_\delta(f) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

En particulier, pour tout $\alpha > 0$:

$$\left(\exists M' > 0, \; K \subset \{ f \in \mathcal{C} \mid N_\alpha(f) \leqslant M' \} \right)$$

$\Longrightarrow K$ équicontinu.

Donc il suffit de prendre

$$K = \{ f \in \mathcal{C} \mid |f(0)| \leqslant M \;\&\; N_\alpha(f) \leqslant M' \}$$

et mq $\forall \varepsilon > 0, \; \exists M, M' > 0, \; \sup_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X_n \in K^c) \leqslant \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \; \exists M, M' > 0, \; \sup_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n(0)| \geqslant M \;\&\; N_\alpha(X_n) \geqslant M') \leqslant \varepsilon$

$$\Leftarrow \begin{cases} (X_n(0) \,;\, n \geq 1) & \text{tendu} \\ (N_\alpha(X_n) \,;\, n \geq 1) & \text{tendu pour un certain } \alpha > 0 \end{cases}$$

Mq $\forall\, 0 < \alpha < \beta/p$, $(N_\alpha(X_n) \,;\, n \geq 1)$ tendu.

Commençons par une analyse préliminaire :

Posons
$$\begin{cases} D_m := \text{Nombres dyadiques d'ordre } m \\ \quad = \left\{ \dfrac{k}{2^m} \,;\, 0 \leq k < 2^m \right\} \\ \triangle \ \operatorname{Card} D_m = 2^m \\ K_m(X) := \sup\limits_{t \in D_m} |X_{t+2^{-m}} - X_t| \end{cases}$$

1 Mq $\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p \leq C\,|t-s|^{1+\beta}$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\, K_m(X)^p \leq C \cdot 2^{-m\beta}$$

$$\mathbb{E}\, K_m(X)^p = \mathbb{E} \sup_{t \in D_m} |X_{t+2^{-m}} - X_t|^p$$

$$\leq \sum_{t \in D_m} \mathbb{E}\,|X_{t+2^{-m}} - X_t|^p \leq C \cdot \operatorname{card} D_m \times (2^{-m})^{1+\beta}$$

$$= C\, 2^m \cdot 2^{-m(1+\beta)} = C\, 2^{-m\beta}$$

② Mq $N_\alpha(X) \leq 2 \sum_{m\geq 0} K_m(X)\, 2^{\alpha m} \quad \forall X$

Par continuité de X fixé :

$$N_\alpha(X) = \sup_{\substack{(s,t)\in\left(\bigcup_{m\geq 0} D_m\right)^2 \\ s\neq t}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}$$

Si $s<t \in \bigcup_{m\geq 0} D_m$, $\exists k\geq 0$, $2^{-(k+1)} \leq t-s \leq 2^{-k}$

et l'intervalle $[s,t[$ s'écrit

$$[s;t[= \bigsqcup_{i=0}^{N-1} [\tau_i ; \tau_{i+1}[$$

avec $s = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$

Réfléchir & penser à l'arbre dyadique

$\tau_i \in D_m \qquad m \geq k$

(Plus fin car plus petits pas)

(τ_i, τ_{i+1}) consécutifs pour un certain D_{m_0}

Aucun 3 intervalles n'ont la même longueur ie $|\tau_{i+1} - \tau_i| = |\tau_{j+1} - \tau_j|$ pour au plus 2 indices.

Donc $|X_t - X_s| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}|$

$$\leq 2 \sum_{k\geq m+1} K_k(X)$$

Donc $\dfrac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \leq 2 \left(\sum_{k \geq m+1} K_k(X) \right) 2^{(m+1)\alpha}$

$$\leq 2 \sum_{k \geq m+1} K_k(X)\, 2^{k\alpha}$$

$$\leq 2 \sum_{k \geq 0} K_k(X)\, 2^{k\alpha}$$

ne dépend pas de (t,s)

Donc $N_\alpha(X) = \sup \dfrac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \leq 2 \sum_{k \geq 0} K_k(X) 2^{k\alpha}$

* Il reste $(N_\alpha(X_n)\ ;\ n \geq 1)$ tendu

$\overset{2}{\Longleftarrow} \left(\sum_{m \geq 0} 2^{m\alpha} K_m(X_n)\ ;\ n \geq 1 \right)$ tendu

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,$

$$\sup_{n \geq 1} \underbrace{\mathbb{P}\left(\sum_{m \geq 0} 2^{m\alpha} K_m(X_n) \geq M \right)}_{\overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}|\ \ldots\ |^p}{M^p}} \leq \varepsilon$$

Donc il suffit que $\exists p > 0,$

$$\mathbb{E}\left| \sum_{m \geq 0} 2^{m\alpha} K_m(X_n) \right|^p \text{ unif. borné en } n$$

et on a :

$$\left[\mathbb{E}\left|\sum_{m\geq 0} 2^{m\alpha} K_m(X_n)\right|^p\right]^{1/p}$$

$$\underset{IT}{\leq} \sum_{m\geq 0} 2^{m\alpha}\left(\mathbb{E}\, K_m(X_n)^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \sum_{m\geq 0} 2^{m\alpha}\left(C \cdot 2^{-m\beta}\right)^{1/p}$$

$$= C^{1/p} \sum_{m\geq 0} 2^{m(\alpha-\frac{\beta}{p})}$$

fini et indépendant de $n \geq 1$, $\forall\, 0 < \alpha < \frac{\beta}{p}$

$\blacksquare$