Chapitre 1 : Fonctions

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Jeudi 1er Octobre 2020

CM8 : Intégrales et primitives

But : calculer des aires.

Plan :

- la notion d'intégrale et ses propriétés,
- le calcul d'aire,
- les primitives.

1. Intégrale et calcul d'aire

Definition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On appelle ***primitive*** de f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous a et b de I, on définit l'***intégrale*** de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b$$

$f = G$

$f' = g$

Question 1

On suppose que f est dérivable. A-t-on $\displaystyle\int_0^x f'(t)dt = f(x)$?

si $f(0)=0$
1. Oui, toujours.
2. Non, pas toujours, mais parfois.
3. Non, jamais.

$$= \int_0^x g(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \left[G(t)\right]_0^x = G(x) - G(0) = f(x) - f(0)$$

Si F_1 & F_2 primitive de f

Alors $f = F_1' = F_2'$ donc $(F_1 - F_2)' = 0$

donc $F_1 - F_2 = \text{Cste}$

Rappel : Deux primitives de $f : I \to \mathbb{R}$ diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors

$$F_2 = F_1 + \text{cste}.$$

Un certain nombre de primitives « classiques » sont à connaître par cœur.

Remarque 8

❶ La définition d'intégrale semble sous-entendre que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ dépend de la primitive de f choisie. Vérifions que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est en fait indépendant de F.

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

↳ <u>UNE</u> primitive.

(N'IMPORTE LAQUELLE)

Si F_1 est une autre, $F_1 = F + Cste$

$$[F_1(t)]_a^b = F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + \cancel{Cste}) - (F(a) + \cancel{Cste})$$
$$= F(b) - F(a).$$

Remarque 8

❶ La définition d'intégrale semble sous-entendre que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ dépend de la primitive de f choisie. Vérifions que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est en fait indépendant de F.

❷ L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité suivantes :

Exo

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \text{ et } \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

préservé en "regardant les choses en sens inverse".

La dérivation est linéaire

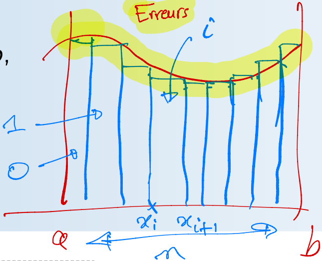
$(f+g)' = f' + g'$; $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Théorème 9. Admis

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ alors l'aire délimitée par :

- les droites d'équations $x = a$, $x = b$,
- l'axe des abscisses,
- et $\mathscr{C}_f$

est égale à $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ unités d'aire.



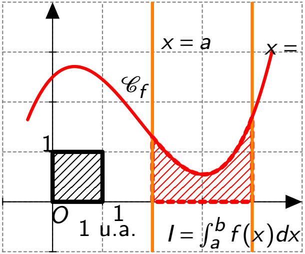
Aire

$\approx \sum$ Aire rectangle i

$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}(i+1)\right)$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \, f(x_i)$

$\approx \int_a^b dx \, f(x)$



ℓ

L

Aire $= L \times \ell$.

$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}$

$x_{i+1} = a + (b-a)\frac{i+1}{n}$

$\ell = x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n}$

$L = f(x_{i+1})$

Exercice 26

1. Calculez $I = \int_0^4 x^2 + 2x + 1 \mathrm{d}x$.
2. Interprétez graphiquement I en terme d'aires. Illustrez vos propos par un schéma.

2. Propriétés de l'intégrale

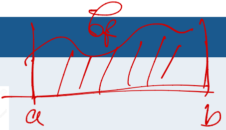
Proposition 4. Conservation de l'ordre ♥

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a < b$.

- Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Démonstration.

- Aire sous la courbe donc ≥ 0.



- Si $f \leq g$, $\varphi = g - f \geq 0$ donc $\int_a^b \varphi \geq 0$

donc $0 \leq \int_a^b \varphi = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$

Linéarité $= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x).dx$. $\boxed{}$

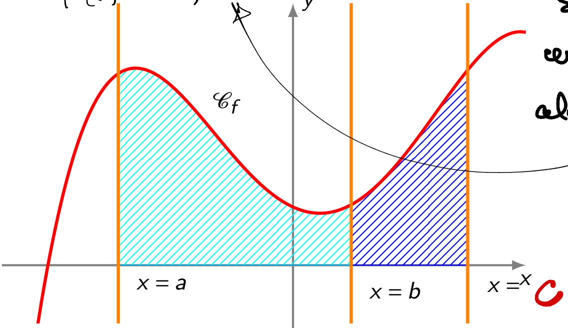
□

Proposition 5. Relation de Chasles

Si f est une fonction continue sur $[a, c]$ et b désigne un réel de $[a, c]$, alors on a :

$$\underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{F(c)-F(a)} \overset{?}{=} \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{F(b)-F(a)} + \overbrace{\int_b^c f(x)dx}^{F(c)-F(b)}$$

Preuve: Si F est une primitive alors



Donc on a bien $F(c)-F(a) = \cancel{F(b)}-F(a) - [F(c)-\cancel{F(b)}]$

Remarque : Conséquences de la relation de Chasles

Conséquences de la définition.

Intégrale « vide » :

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$F(a) - F(a)$$

Échange des bornes :

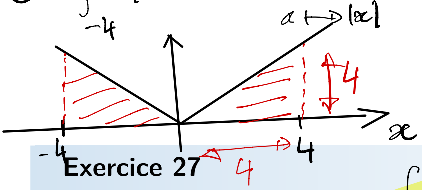
$$\underbrace{\int_b^a f(x)dx}_{F(a)-F(b)} = -\int_a^b f(x)dx.$$

$$F(a) - F(b) = -\left[F(b) - F(a)\right]$$

① $\int_{-4}^{4} |x|\,dx \overset{\text{géom}}{=}$ Aire sous la courbe $= 2 \times$ Aire d'un triangle rect

$= \cancel{2} \times B \times H / \cancel{2}$

$= 16$



Exercice 27

❶ Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x|\,dx$ puis illustrer le résultat.

❷ Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x-2|\,dx$ puis illustrer le résultat.

Autrement : par l'analyse

$$\int_{-4}^{4} |x|\,dx = \int_{-4}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{4} |x|\,dx$$

$$= -\int_{-4}^{0} x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx$$

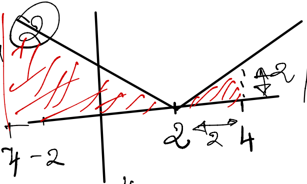
$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$= -\left[0 - \frac{4^2}{2}\right] + \frac{4^2}{2}$$

$$= \cancel{2} \times \frac{4^2}{\cancel{2}} = 16.$$

Fastidieux.

②



$$\int_{-4}^{4} |x-2|\,dx = \frac{B_1 \times H_1}{2} + \frac{B_2 \times H_2}{2}$$

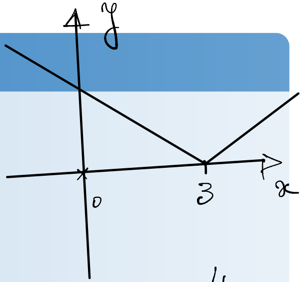
$$= \frac{2^2}{2} + \frac{6^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{36}{2} = 2 + 18 = 20.$$

Question 2

Que vaut l'intégrale

$$\int_{-4}^{4} \overbrace{|3-x|}^{|x-3|}\, dx?$$

1. $\displaystyle\int_{-4}^{-3}(3-x)dx+\int_{-3}^{4}(x-3)dx$
2. $\displaystyle\int_{-4}^{-3}(x-3)dx+\int_{-3}^{4}(3-x)dx$
3. $\displaystyle\int_{-4}^{3}(3-x)dx+\int_{3}^{4}(x-3)dx$
4. $\displaystyle\int_{-4}^{3}(x-3)dx+\int_{3}^{4}(3-x)dx$

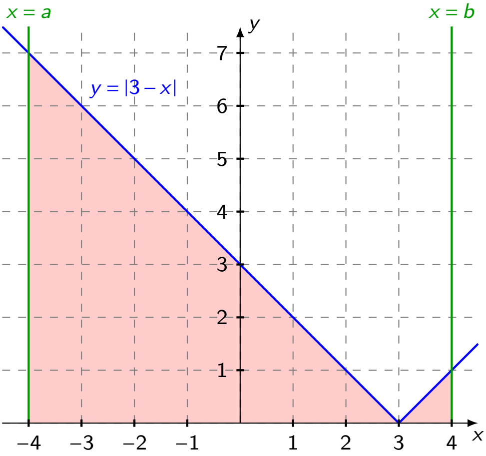


$$\int_{-4}^{3} |3-x|\, dx + \int_{3}^{4} |3-x|\, dx$$

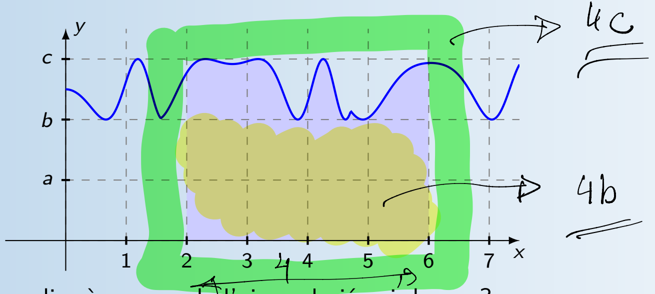
$$= \int_{-4}^{3} \underbrace{(3-x)}_{\geq 0}\, dx$$

$$+ \int_{3}^{4} \underbrace{(x-3)}_{\geq 0}\, dx$$

Réponse en image :



Question 3



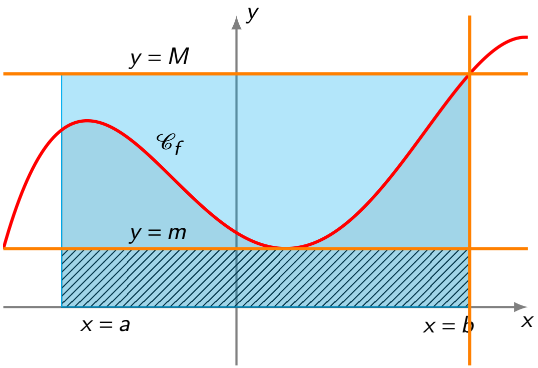
Que peut-on dire à propos de l'aire coloriée ci-dessus ?

1. Elle est comprise entre b et c
2. Elle est comprise entre $2b$ et $2c$
3. Elle est comprise entre $4b$ et $4c$
4. Elle est comprise entre $6b$ et $6c$

Proposition 6. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit m et M deux nombres réels. Si pour tout x de $[a, b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors on a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

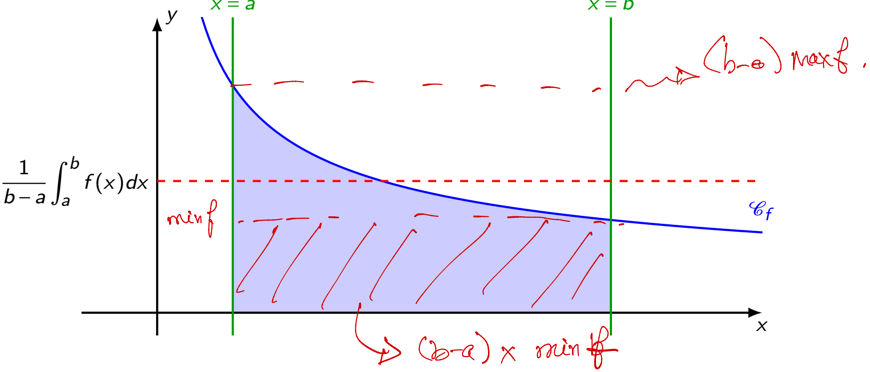


Definition

On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a, b]$ le nombre réel

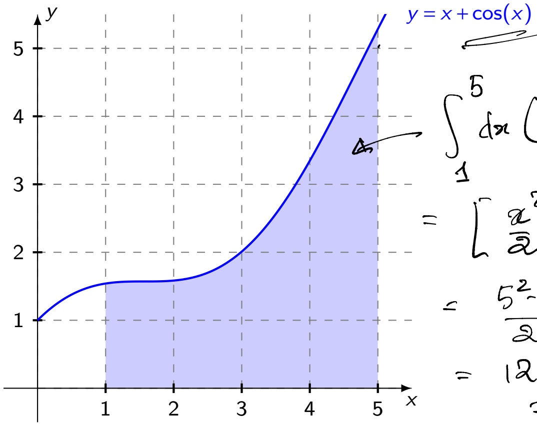
$$\min f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant \max f$$

$$(b-a)\min f \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)\max f$$



Exercice 28

Calculer l'aire colorée ci-dessous.



$$\int_1^5 dx\,(x+\cos x)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_1^5$$

$$= \frac{5^2-1}{2} + \sin 5 - \sin 1$$

$$= 12 + \sin 5 - \sin 1.$$

Aire = Aire en rouge + Aire en bleu

symétrie $\overset{\Downarrow}{=}$ 2 × Aire en rouge

$= 2\int_{-1}^{1} dx\,(4-e^{-x})$

$= 2\left[4x+e^{-x}\right]_{-1}^{1}$

$= 2\left(8+e^{-1}-e\right)$

$= 16 - 2(e-e^{-1})$

Exercice 29

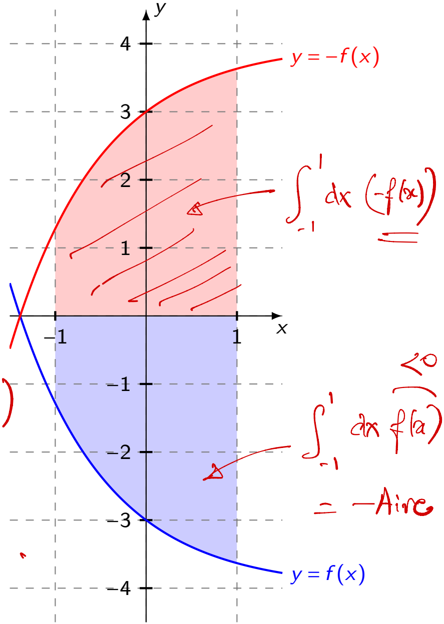
La courbe représentée est celle de la fonction

$$f(x) = e^{-x} - 4.$$

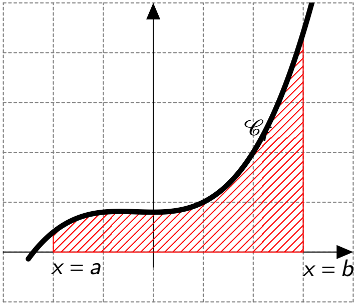
Calculer l'aire colorée.

$\int_a^b f(t)\,dt$

aire algébrique !

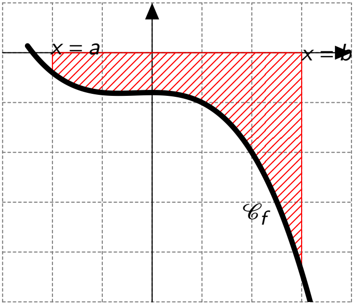


Bilan : lorsque f ne change pas de signe



Si f est positive sur $[a, b]$, on retiendra

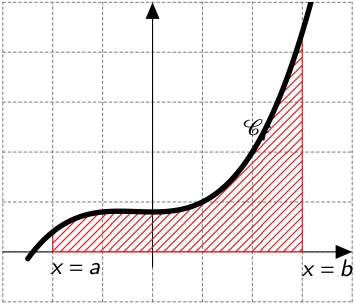
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$



Si f est négative sur $[a, b]$, on retiendra

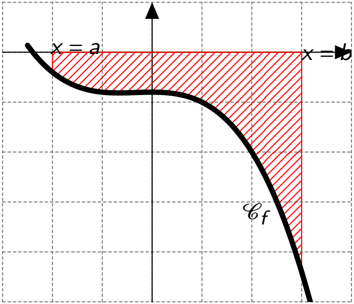
$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Bilan : lorsque f ne change pas de signe



Si f est positive sur $[a, b]$, on retiendra

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(t)dt$$



Si f est négative sur $[a, b]$, on retiendra

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(t)dt$$

3. Primitives

Le formulaire de primitives est à connaître par cœur !

Fonction f	une primitive F	remarques
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \neq -1$, le domaine de déf. dépend de a
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \in \mathbb{R}^{+*}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln(x) - x$	$x \in]0, +\infty[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in]-1, 1[$
$u'(x)(u(x))^\alpha$	$\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	uniquement si $\alpha \neq -1$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x) \rvert)$	

Remarque 9

On obtient toutes les primitives d'une fonction en ajoutant une constante à une primitive fixée : si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions $F + C$, où C est une constante.

À venir

- CC1 : Semaine prochaine (lire le syllabus !) $\hookrightarrow$ regarder Celcat pour lieu et horaire !
- TD : préparer l'exercice 41
- Dates limites DM WIMS :
  - DM3 - Bijection et fonction réciproque - 4 octobre 2020
  - DM4 - Étude qualitative de fonctions - 11 octobre 2020
  - DM5 - Intégrales et primitives - 25 octobre 2020
  - ...