Chapitre 1 : Fonctions

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 30 Septembre 2020

CM7 - Limites et asymptotes

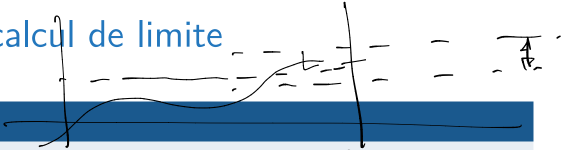
But : savoir tracer la courbe de la fonction $f :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}.$$

Plan :

- règles usuelles sur les limites (somme, produit, quotient et composée),
- croissances comparées,
- asymptotes.

1. Règles usuelles de calcul de limite



Definition

On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x > M_\varepsilon \Rightarrow f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, ou encore
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemple $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = L$

Prenons $f(x) = \frac{1}{x}$. Que vaut L ? Que vaut M_ε ?

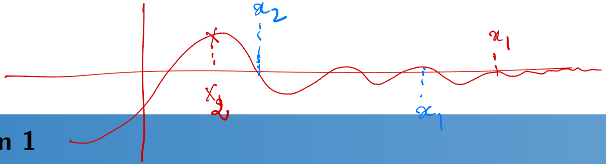
Si $\varepsilon > 0$ précision, Quel est le M_ε tq

$(x \geq M_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (x \geq M_\varepsilon \Rightarrow 1/|x| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (x \geq M_\varepsilon \Rightarrow |x| \geq 1/\varepsilon)$

aussi $1/\varepsilon + 10$

DONC $M_\varepsilon = 1/\varepsilon$ fonctionne



Question 1

L'égalité

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

signifie que si x_1 est plus grand que x_2 alors $f(x_1)$ est plus proche de L que $f(x_2)$.

1. C'est faux et je sais expliquer pourquoi !
2. C'est faux mais je ne sais pas dire pourquoi.
3. C'est vrai mais je ne sais pas dire pourquoi.
4. C'est vrai et je sais expliquer pourquoi !

Somme de limites

Le tableau suivant donne la limite

$$\lim_{t\to\alpha}(u+v)(t)$$

$\lim_{t\to\alpha} u(t) \setminus \lim_{t\to\alpha} v(t)$	L' $<+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
L $<+\infty$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple 16

- Soient u et v les fonctions définies respectivement par $u(t) = 2t+1$ et $v(t) = -3\cos t$. Calculons les limites respectives de u et v en 0, puis la limite de la somme.

Continuité. Donc $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = u(0) = 1$

$\lim v(t) = v(0) = -3$

- Même chose avec les fonctions u et v définies respectivement par $u(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = -\frac{3}{t^4}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = -\infty$

Mais $+\infty - \infty$ FI

$\lim\limits_{t\to 0} u(t)+v(t)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t^4} = \lim\limits_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t^4}}_{\to 0^+} \overbrace{(t^2-3)}^{-3}$

$= -3/0^+ = -\infty$.

Produit de limites

Le tableau suivant donne la limite

$$\lim_{t\to\alpha}(u\cdot v)(t)$$

<table>
<tr><th>$\lim_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim_{t\to\alpha} v(t)$</th><th>$L'<0$</th><th>$0$</th><th>$L'>0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$L<0$</td><td rowspan="3" colspan="3">LL'</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>FI</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$L>0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>FI</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>FI</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Exercice 22

Calculer la limite

$$\lim_{t\to 0}\left[\underbrace{2+\overbrace{\overbrace{(3+t)}^{3}\,\overbrace{(1+t^2)}^{1}}^{3}}_{\to 2+3}\right]. \quad = \underline{\underline{5}}$$

Quotient de limites

Le tableau ci-dessous donne la limite

$$\lim_{t \to \alpha} \frac{u}{v}(t)$$

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$</th><th>$L'<0$</th><th>$L'>0$</th><th>$0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$L<0$</td><td colspan="2" rowspan="3">$\dfrac{L}{L'}$</td><td>$\mp\infty$ [1]</td><td colspan="2" rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$L>0$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td></tr>
<tr><td>0</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td><td colspan="2">FI</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$\mp\infty$ [1]</td><td colspan="2">FI</td></tr>
</table>

1. Attention : si v n'est pas de signe constant au voisinage de α, le quotient n'a pas de limite.

0^+

Remarque

Si la fonction u ne garde pas un signe constant près de α, alors $\frac{1}{u}$ n'admet pas de limite en α

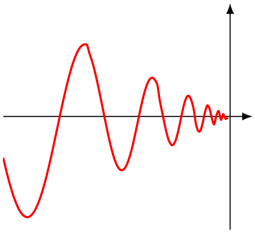


FIGURE – une fonction u

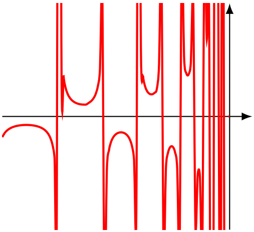


FIGURE – la fonction $\frac{1}{u}$

$\lim_{t \to 0} u(t) = 0$ (mais pas 0^+ ou 0^-)

$$t^2-4=(t+2)(t-2)$$
$$2t+4=2(t+2)$$

Exemple 17

0

$t \to 2$

Soit $f:\mathbb{R}\backslash\{-2\}\to\mathbb{R},\ t\mapsto \dfrac{t^2-4}{2t+4}$. Que peut-on dire de la limite

4

$$\lim_{t\to 2} f(t)? = 0$$

$$\lim_{t\to -2} f(t) = \lim_{\substack{t\to -2\\ t\neq -2}} \frac{\cancel{(t+2)}(t-2)}{2\cancel{(t+2)}} = \lim_{t\to -2} (t-2)/2$$

$$= -4/2 = -2$$

et là

$$t^2-4 \to 0$$
$$2t+4 \to 0$$

Exemple 17

Soit $f:\mathbb{R}\backslash\{-2\}\to\mathbb{R},\ t\mapsto\dfrac{t^2-4}{2t+4}$. Que peut-on dire de la limite

$$\lim_{t\to 2} f(t)?$$

- On a $\lim\limits_{t\to 2} u(t)=0$,
- et $\lim\limits_{t\to 2} v(t)=8$,
- donc la limite du quotient existe et vaut $\frac{0}{8}=0$.

Question 2

La limite de $\dfrac{10^8 x + 1}{x^2}$ en $+\infty$ est :

$+\infty$ $+\infty$

$= \dfrac{10^8}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

$0 \qquad 0$

1. n'existe pas
2. 0
3. 1
4. 10^8
5. $+\infty$
6. C'est une forme indéterminée, on ne peut pas conclure.

Bilan

Il y a quatre formes indéterminées à connaître par cœur :

- $\infty - \infty = \text{FI}$,
- $\infty \times 0 = \text{FI}$,
- $\frac{0}{0} = \text{FI}$,
- $\frac{\infty}{\infty} = \text{FI}$.

Dans une telle situation, on réécrit lorsque c'est possible la fonction différemment de façon à rendre la forme déterminée.

Composée de limites

Théorème 6. Admis

Soit u, g deux fonctions, α , β et γ trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{t\to\alpha} u(t) & = & \beta \\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x) & = & \gamma \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{t\to\alpha} g(\overbrace{u(t)}^{\substack{\beta \\ \uparrow\, t\to\alpha}}) = \gamma$.

$u(t) \to \beta$

$\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$

Question 3

Que vaut la limite

$$\lim_{x \to -\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \ ?$$

1. $-\infty$
2. $-\dfrac{\pi}{2}$
3. -1
4. 0
5. 1
6. $\dfrac{\pi}{2}$
7. $+\infty$

Exercice 23

Calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{t\to 0} \sqrt{4+t+\ln(1+t)}.$$

2. Croissances comparées

Théorème 7. Comparaison exponentielle et polynômes à l'infini - Admis

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

De façon similaire, on a $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x \times x^n = 0.$$

$(-1)^n \quad x^n / e^x$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \cdot x^n = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(-x)^n = \frac{1}{\infty} = 0$$

Exercice 24

Calculer les limites

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+x)$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{1}_{\to 1}+\underbrace{x\cdot e^{x}}_{\to 0}\Big) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{e^x+1}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}(1-\underbrace{xe^{-x}}_{\to 0})}{\cancel{e^x}(1+\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})}$; $1-xe^{-x}\to 1$; $1+e^{-x}\to 1$; $=\dfrac{1}{1}=1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3+4x^2+x+1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{e^x}{x^3}}_{\to+\infty}\cdot\dfrac{1}{\Big(1+\underbrace{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}_{\to 0}\Big)} = \underline{\underline{+\infty}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Théorème 8. ♥

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/n}} = 0, \iff \lim_{x\to 0^+} x \times \ln(x) = 0.$$

$y = 1/x \to +\infty$

Démonstration.

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$$

□

$\log_{10}$

$$\frac{\ln .}{\ln 10} \; ? \; \ln \quad \log$$

$\lim_{\beta} g = \gamma$

$\lim_{\alpha} u = \beta$

$\Longrightarrow \lim_{t \to \alpha} g(u(t)) = \gamma$

Question 4

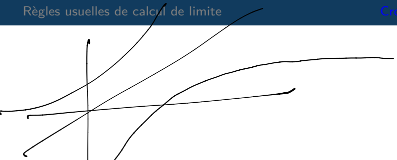
Pour étudier $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t}$, on utilise le théorème 6 en prenant les fonctions

1. $g(x) = -xe^x$ et $u(t) = -\ln(t)$ $\leadsto g \circ u(t) = -(-\ln t)e^{-\ln t} = \ln t / t$
2. $g(x) = xe^x$ et $u(t) = \ln(t)$
3. $g(x) = \ln(x)$ et $u(t) = \frac{1}{t}$ $\leadsto g \circ u(t) = \ln 1/t = \underline{\underline{-\ln t}}$
4. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $u(t) = e^t$
5. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -xe^x = 0 = \gamma$

$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \underline{\underline{-\infty}} = \beta$

$\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to+\infty} g \circ u(t) \overset{?}{=} 0 = \gamma$



$$\ln 10^{100} = 100 \ln 10$$

Exercice 25

Calculer les limites

❶ $$\lim_{x\to+\infty}\big(\underbrace{3x}_{+\infty}-2\underbrace{\ln(x)}_{+\infty}\big) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\Big(3-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0 \text{ par CC}}\Big) = +\infty$$

$$\left(3-\frac{\ln x}{x}\right) \to 3$$

❷ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^n} = -\infty$$

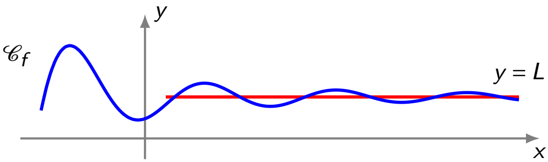
❸ $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^n}_{+\infty} \times \underbrace{\ln(x)}_{+\infty} \quad \text{avec } n \geqslant 1 = +\infty$$

3. Asymptotes à une courbe

Definition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Illustration

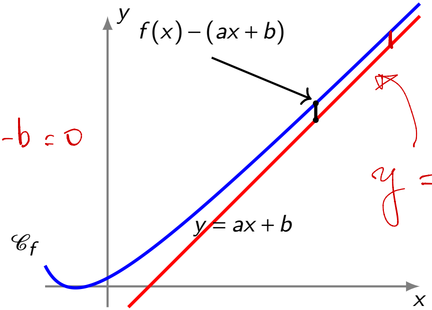


Definition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et a, b deux réels.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$), on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une ***asymptote oblique*** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Rq : Si $a = 0$
Alors asymptote $\iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - b = 0$

L'asymptote oblique est en fait horizontale !



$y = ax + b$

Il suffit que

$$\begin{cases} -2b+c = 1 \\ -2a+b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3+2a = 5 \\ c = 1+2b = 11 \end{cases}$$

Par identificat°.

$$= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2}$$

deg 2

$$= \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2}$$

$$= ax+b + \boxed{\frac{c}{x-2}}$$

Exemple 18

deg 2

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Déterminons l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

$$= \underline{x+5} + \frac{11}{x-2}$$

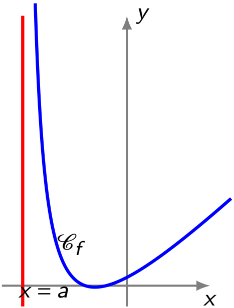
Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+5) = \lim_{x\to+\infty} \frac{11}{x-2} = \underline{0}$ ☒

Idée générale : Div euclidienne de poly

$$\underbrace{x^2+3x+1}_{} = \overset{\text{deg } 1}{P(x)}\underbrace{(x-2)}_{\text{deg } 1} + c \leftarrow \text{deg } 0$$

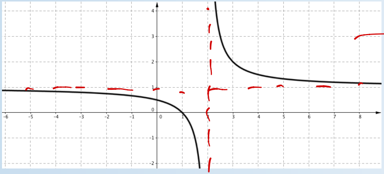
Definition

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** d'équation $x = a$.



Question 5

On considère la fonction f représentée ci-dessous.



Quelle expression donneriez-vous à $f(x)$?

❶ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

❷ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

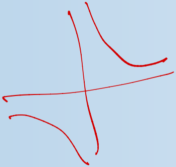
❸ $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

❹ $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

❺ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$

Question 6

On considère la fonction f représentée ci-dessous. Trouvez f.



sinon

$-\infty$

$x \to 2$

Puissance paire

1. $\cancel{f(x) = \dfrac{1}{x-2}}$
2. $\cancel{f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}}$
3. $\cancel{f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}}$
4. $\cancel{f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}}$
5. $\cancel{f(x) = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}}$ ✓
6. $\cancel{f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}}$ ✓
7. $\cancel{f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-2)^2}}$ $\to -3$ ✓ $\to 0$
8. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$ ✓

À venir

- CC1 : Semaine prochaine (lire le syllabus !) $\hookrightarrow$ regarder Celcat pour lieu et horaire !
- TD 7 : préparer les questions 1, 2 et 3 de l'exercice 34
- Dates limites DM WIMS :
  - DM3 - Bijection et fonction réciproque - 4 octobre 2020
  - DM4 - Étude qualitative de fonctions - 11 octobre 2020
  - DM5 - Intégrales et primitives - 25 octobre 2020
  - ...