Option 1 : 1/2 Physique
1/2 Autonomie

OUI

Chapitre 1 : Fonctions

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

NON

Jeudi 24 Septembre 2020

Option 2 : Tous sauf H2
1/2 Phys + 1/2 En ligne

H2 : Que du en ligne.

CM6 : Etudier une fonction pour en tracer l'allure

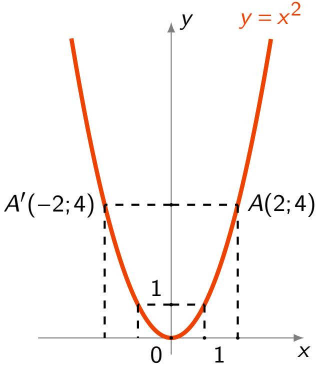
But : savoir tracer le graphe d'une fonction, comme par exemple la fonction $f(x) = x^3 - 2x$.

Plan :

Terminale

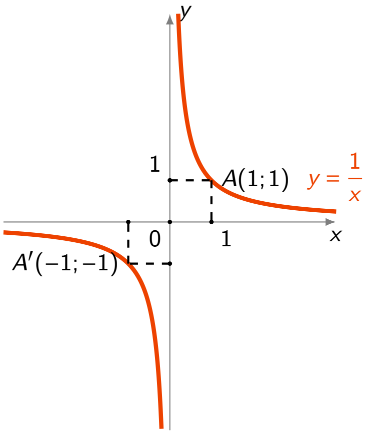
- graphes de fonctions usuelles et tableau de variations,
- concavité et convexité, Un peu moins
- parité et périodicité.

1. Graphes de fonctions usuelles et tableau de variation

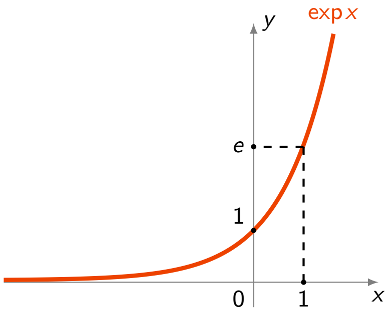


$x \longmapsto x^2$

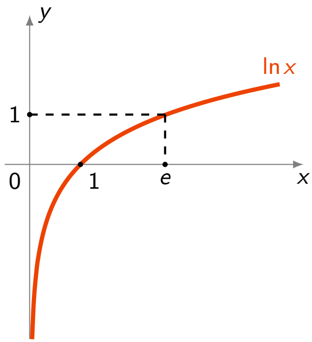
La fonction carré est une ***fonction paire***, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Equivalent



La fonction inverse est une ***fonction impaire***, sa courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.



Graphe de la fonction exponentielle



Graphe de la fonction logarithme népérien

$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x))\}$

Question 1

$\mathcal{C}_g = \{(x, g(x))\}$

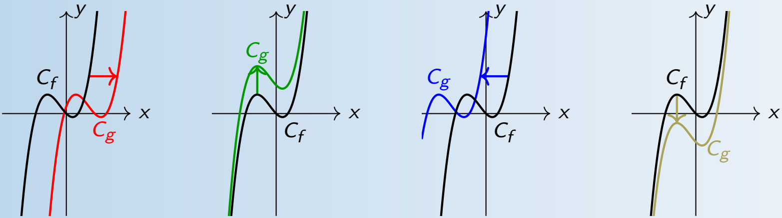
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si

$$g(x) = f(x) + b,$$

$= \{(x, f(x)+b)\}$

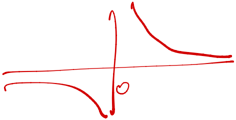
$= \{(x, f(x)) + (0,b)\}$

alors C_g est l'image de C_f par une translation de vecteur :

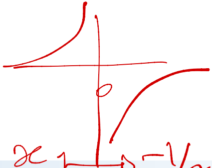


❶ $(b, 0)$ ❷ $(0, b)$ ❸ $(-b, 0)$ ❹ $(0, -b)$

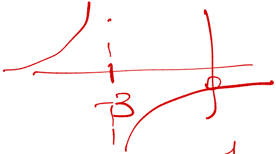
2/



$x \mapsto +1/x$



$x \mapsto -1/x$



$x \mapsto -\frac{1}{x+3}$

Exercice 19

Donnez l'allure des courbes représentant les fonctions :

1/ • $f_1(x) = -x^2 + 3$

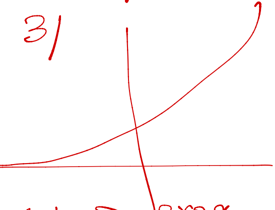
2/ • $f_2(x) = -\dfrac{1}{x+3}$

3/ • $f_3(x) = \exp(x-2) - 1$

4/ • $f_4(x) = \ln(|x|)$

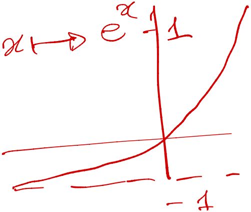
$x \mapsto e^{x-2} - 1$

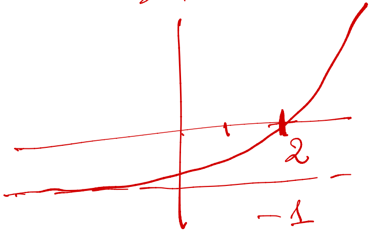
3/



$x \mapsto \exp x$

$x \mapsto e^x - 1$





$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x))\}$

$X = x + a$

Question 2

$\mathcal{C}_g = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

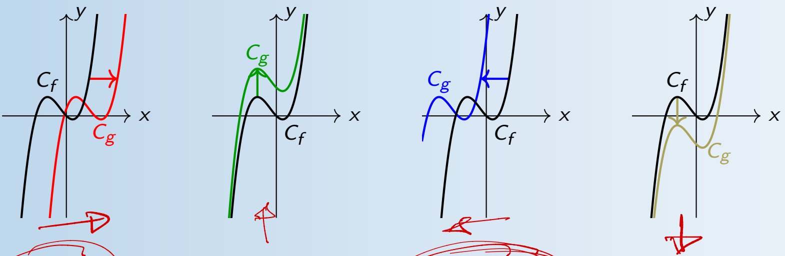
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si

$$\boxed{g(x) = f(x+a),}$$

$= \{(x, f(x+a)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= \{(X-a, f(X)) \mid X \in \mathbb{R}\}$

alors C_g est l'image de C_f par une translation de vecteur :



❶ $(a,0)$ ❷ $(0,a)$ ❸ $(-a,0)$ ✓ ❹ $(0,-a)$

Donc $\mathcal{C}_g = \{(-a,0) + (X, f(X)) \mid X \in \mathbb{R}\}$

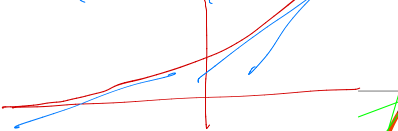
2. Concavité et convexité

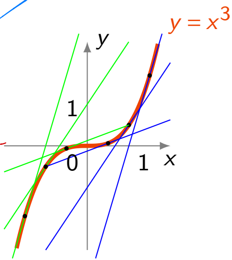
Definition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

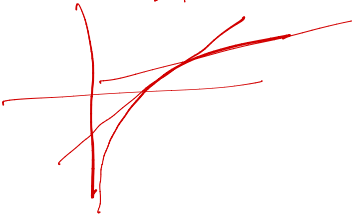
- On dit que f est ***convexe*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes. $\Longleftrightarrow f''(x) \geq 0$
- On dit que f est ***concave*** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses tangentes. $\Longleftrightarrow f''(x) \leq 0$
- a est un ***point d'inflexion*** de f si f'' s'annule en a en changeant de signe. $\Longleftrightarrow f''(a) = 0$ & changement de signe

$x \longmapsto \exp x$





$x \longmapsto \ln x$



Exercice

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

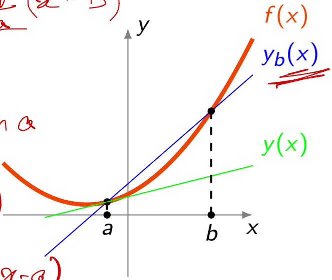
1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Donnez l'équation de la droite donnée par y_b.
2. En déduire l'équation de la tangente y au graphe de f en a.

① $y_b(x) = b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$

② Si T_a et la tangente en a

$T_a : y = \lim_{b \to a} y_b(x)$

$= a + f'(a)(x-a)$



$\mathcal{C}_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$

au dessus de ses tangentes.

Question 3

La courbe représentative de $f : I \to \mathbb{R}$ est située au-dessus de ses tangentes si pour tout $a \in I$

NON ❶ $y(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $x \in I$

❷ $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $x \in I$

OUI ❸ $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $x \in I$

NON ❹ $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) - f(a)$ pour tout $x \in I$

❺ J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

Théorème 5

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

(1) • f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.

(2) • f est concave sur I et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.

Démonstration.

Exigible et à noter

□

Preuve : • Déjà (1) $\Longleftrightarrow$ (2)

car f convexe $\Longleftrightarrow$ $-f$ concave

(Mettre en $-$ renverse dessus/dessous)

$\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ -f''(x) \leqslant 0$

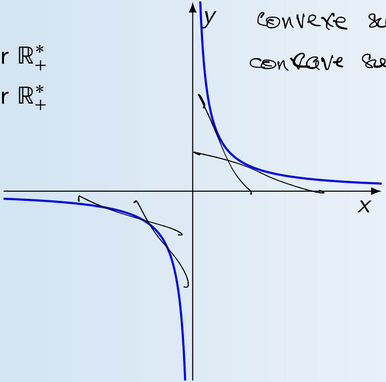
Question 4

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :

1. concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
2. convexe sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
3. convexe sur $\mathbb{R}_-^*$ et concave sur $\mathbb{R}_+^*$
4. concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$f(x) = 1/x$

$f'(x) = -1/x^2$ $\quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$



convexe sur $x>0$

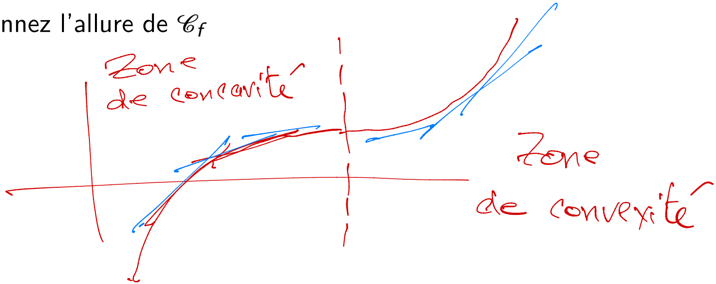
concave sur $x<0$

Exercice 21

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 13x - 4\right)$.

$f'(x) = \dots$ $f''(x) = 6x + \dots$

1. Déterminez les éventuels points d'inflexion de f ainsi que sa convexité.
2. Donnez l'allure de $\mathscr{C}_f$



3. Parité et périodicité

Definition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est ***paire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est ***impaire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).

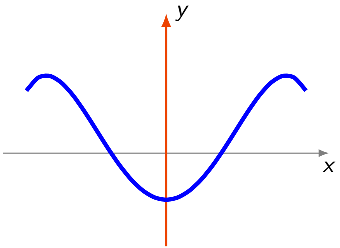
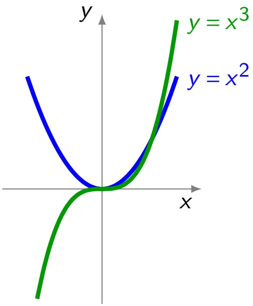


FIGURE – Une fonction paire à gauche, une fonction impaire à droite

Exemple 14

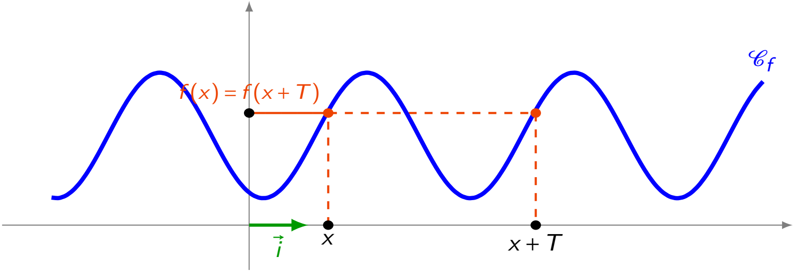
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.



Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite ***périodique*** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.

Figure – Fonction périodique

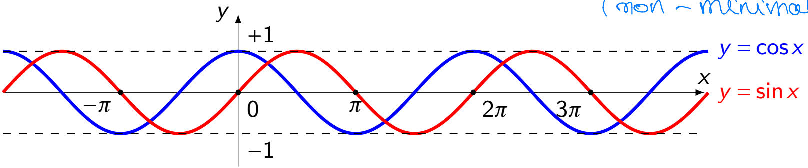


Exemple 15

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

mais 4π, 6π sont des périodes.
(non-minimales)

FIGURE – Fonction sinus et cosinus



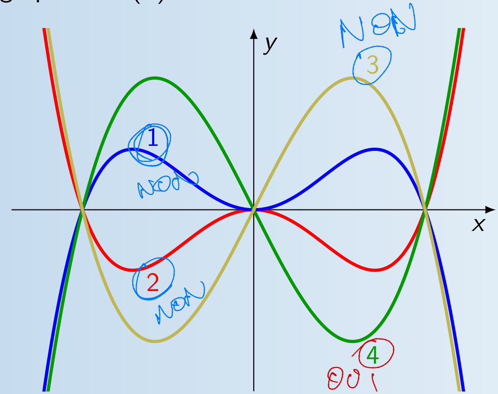
Étudier une fonction pour obtenir son graphe

Symétries

1. Domaine de définition D_f.
2. Étude de la T-périodicité et, le cas échéant, restriction de l'étude à un intervalle de longueur T
3. Étude de la parité et, le cas échéant, restriction de l'étude d'un côté de 0
4. Dérivabilité ?
5. Tableau de variations avec, si besoin, une étude des dérivées d'ordre supérieur
6. Calcul des limites

Question 5

Quel est le graphe de $f(x) = x^3 - 2x$?



Ainsi f' du signe de $-2x\left(\ln(x^2+1)-1\right)$

x		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$	
$-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\ln(x^2+1)-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$+$						

$$f'(x) = \frac{-2x\left(\ln(x^2+1)-1\right)}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 20

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

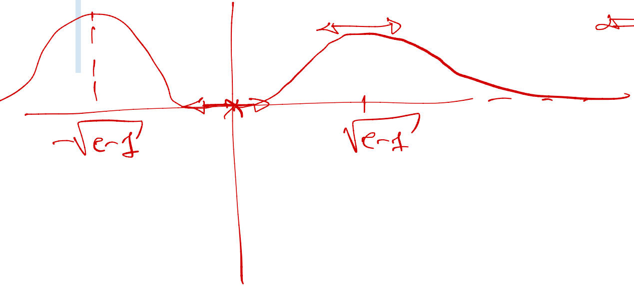
$\ln(x^2+1) - 1 \geqslant 0$

$\iff \ln(x^2+1) \geqslant 1$

$\iff x^2 + 1 \geqslant e$

$\iff x^2 \geqslant e - 1$

$\iff x \in \left]-\infty, -\sqrt{e-1}\right] \cup \left[\sqrt{e-1}; +\infty\right[$



$e-1 \simeq 1{,}718$

$\sqrt{e-1} \simeq 1{,}3$

À venir

NON ! ANNULE !

- QCM en amphi la semaine prochaine : programme CM 1 à 6
- TD 6 : préparer la question 1 de l'exercice 28
- Dates limites DM WIMS :
  - DM1 - Raisonnement et logique - 20 septembre 2020
  - DM2 - Compositions et dérivées - 27 septembre 2020
  - DM3 - Bijection et fonction réciproque - 4 octobre 2020
  - DM4 - Étude qualitative de fonctions - 11 octobre 2020
  - ...