Chapitre 3 : Polynômes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 25 Novembre 2020

CM17 : Racine d'un polynôme et factorisation

But : les nombres -1 et 2 annulent $P(X) = X^2 - X - 2$. Et alors ?

Alors $P(X) = (X+1)(X-2)$!

Plan :

- racine et divisibilité,
- caractérisation par les dérivées,
- factorisation d'un polynôme grâce à ses racines.

1. Racine d'un polynôme

Definition

Soit P un polynôme. Le nombre r est appelé ***racine*** de P si $P(r) = 0$.

Théorème 2. ♥

Soit P un polynôme. Le nombre r est une racine de P si et seulement si $(X-r)$ divise $P(X)$.

Démonstration.

Preuve :

Posons la div euclidienne :

$$P(X) = (X-r)\,Q(X) + R(X)$$

⚠ $\deg R < \deg(X-r) = 1$

Donc $\deg R \leq 0$

donc $R = \text{Cste}$

Comme $P(r) = (r-r)\,Q(r) + R(r) = R$

Donc $P(X) = (X-r)\,Q(X) + P(r)$

$P(r) = 0$ ssi $P(X) = (X-r)Q$

ssi $(X-r) \mid P$.

Question 1

Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est divisible par :

1. ~~X et $X - 3$,~~
2. $X + 1$ et $X - 3$,
3. ~~X et $X + 3$,~~
4. $X + 1$ et $X + 3$.

Exercice 1

1. Justifiez que le polynôme $X^n - 1$ est divisible par $X - 1$.
2. Calculez explicitement le quotient.
3. En déduire que si ζ est une racine n-ième de l'unité différente de 1, alors
$$\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} + \cdots + \zeta + 1 = 0.$$

(vu en TD des complexes)

Observons les polynômes :

$$P(X) = X - 1 \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} Q(X) &= X^2 - 2X + 1 \\ &= (X-1)(X-1). \end{aligned}$$

Les polynômes P et Q ont tous les deux une seule racine : $r = 1$.

Mais intuitivement, on a envie de dire que :

- le nombre 1 est « une seule fois » racine de P,
- le nombre 1 est « deux fois » racine de Q.

Cela se formalise grâce à la notion de ***multiplicité***.

Definition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{K}$ une racine de P.

La ***multiplicité*** (ou ***ordre***) de r est l'entier $m \geqslant 1$ tel que

$$(X-r), (X-r)^2, \ldots, (X-r)^m \text{ divisent } P(X)$$

mais $(X-r)^{m+1}$ **ne divise pas** $P(X)$.

Remarque

On dit que r est une ***racine simple*** si $m=1$, et une ***racine multiple*** si $m \geqslant 2$.

Remarque

Si $(X-r)^m$ divise $P(X)$, alors par définition :

$$P(X) = (X-r)^m Q(X).$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}(X-r)^{m+1} \text{ divise } P &\iff (X-r) \text{ divise } Q \\ &\iff Q(r) = 0.\end{aligned}$$

Question 2

Le nombre 1 est racine de $P(X) = (X-1)^2\underbrace{(X^2+X-2)}$. Quel est son ordre ?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

$(X-1)(X+2)$

$= (X-1)^3(X+2)$

2. Racines et dérivées

Definition

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. Le ***polynôme dérivée*** de P est le polynôme

$$P'(X) := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

⚠ Opération formelle.

Exemple

On a

$$(X^2 - 3X + 7)' = 2X - 3.$$

Théorème 3. Admis

Soit P un polynôme. Le nombre r est racine d'ordre **au moins** k de P si et seulement si

$$P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(k-1)}(r) = 0.$$

Ainsi : r a pour multiplicité m $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} (X-r)^m \mid P \\ (X-r)^{m+1} \nmid P \end{cases}$

Remarque

Th 3 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(m-1)}(r) = 0 \\ P^{(m)}(r) \neq 0 \end{cases}$

Par conséquent, si

$$P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(k-1)}(r) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(r) \neq 0,$$

alors r est une racine d'ordre **exactement** k de P.

$P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 1 \rightsquigarrow P'(1) = 4 - 3 - 1 = 0$

Question 3

$P''(X) = 12X^2 - 6X \rightsquigarrow P''(1) = 12 - 6 = 6 \neq 0$

Le polynôme

$$P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$$

a pour racine $r = 1$. Quelle est sa multiplicité ?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. On ne peut pas savoir.

Exercice

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Démontrez qu'il admet $a \in \mathbb{K}$ comme racine d'ordre au moins 2 si et seulement si

$$P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0.$$

(Thm 3 exactement).

3. Factorisation d'un polynôme

Lemme 1

Soit P un polynôme de la forme $P(X) = A(X)B(X)$. Si

- $(X-r)^m$ divise P, et
- $B(r) \neq 0$

alors $(X-r)^m$ divise A.

Démonstration.

Démontrons ce lemme par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation :** le cas où $m = 1$.
- **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que le lemme soit vrai pour $m = p$ et démontrons qu'il reste vrai au rang suivant.

$\square$

Par récurrence $P_1 = (X-r_2)^{m_2} P_2$ où P_2 divisible par les $(X-r_i)$ $i \geq 2$

Lemme 1

Soit P un polynôme de la forme $P(X) = A(X)B(X)$. Si

- $(X-r)^m$ divise P, et
- $B(r) \neq 0$

alors $(X-r)^m$ divise A.

et donc $P(X) = (X-r_1)^{m_1} P_1(X)$
$= (X-r_1)^{m_1}(X-r_2)^{m_2} P_2(X)$
$= (X-r_1)^{m_1} \cdots (X-r_k)^{m_k} P_k(X)$

$(X-r_i)^{m_i} \mid P \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, k$

Théorème 4

Soit P un polynôme. Si $r_1, \dots, r_k$ sont des racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$, alors le polynôme

$$(X-r_1)^{m_1} \cdots (X-r_k)^{m_k} \text{ divise } P.$$

Ainsi $P(X) = \underbrace{(X-r_1)^{m_1}}_{B} P_1(X)$ car m_1 multiplicité

Donc $\forall\, i = 2, \dots, k$, $B(r_i) \neq 0$ et $(X-r_i)^{m_i} \mid P \xrightarrow{\text{Lemme 1}} (X-r_i)^{m_i} \mid P_1$

Question 4

Si $r_1, \ldots, r_k$ sont **toutes** les racines de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$, alors

1. $\deg(P) \leqslant m_1 + \cdots + m_k$
2. $\deg(P) = m_1 + \cdots + m_k$
3. $\deg(P) \geqslant m_1 + \cdots + m_k$
4. on ne peut rien dire.

Corollaire 1

Si P est un polynôme non-nul, et si $r_1, \ldots, r_k$ sont ses racines de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$, alors

$$\deg(P) \geqslant m_1 + \cdots + m_k$$

& $\mathbb{C}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$, il n'y a pas forcément égalité :

$(X-i)(X+i)$

$$P(X) = (X-3)^5(X+1)^2(X^2+1)$$

a pour seules racines $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$, de multiplicités respectives $m_1 = 5$ et $m_2 = 2$, mais

$$\deg(P) = 9 > 7 = m_1 + m_2.$$

Question 5

Le polynôme

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$$

est divisible par :

1. $(X+1)^3$
2. $(X-2)^3$
3. $(X-2)^2(X+1)$
4. $(X-2)(X+1)^2$

À venir

- TD 17 : préparer la question 1 de l'exercice 7
- Dates limites DM WIMS :
    - DM8 - Racines carrées et équations du second degré - 29 novembre 2020
    - DM9 - Polynômes, degré et multiplicité des racines - 6 décembre 2020
    - DM10 - Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples - 13 décembre 2020
    - ...