Chapitre 3 : Polynômes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

~~Mercredi~~ 12 Novembre 2020

Jeudi

CM16 : Polynômes et divisibilité

But du chapitre : définir et étudier les polynômes pour

- mieux comprendre les équations comme $z^5 + 3^3 - 2z^2 - 5z + 7 = 0$,
- aider à l'étude des fonctions polynomiales $f(x) = 3x^4 + 2x - 1$ ou
- calculer des intégrales du type $\int_1^2 \frac{3}{x^3 - 1} dx$.

But du cours : savoir effectuer la division de

$$X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 7X - 3 \text{ par } X^2 + 1.$$

Sur $\mathbb{N}$:

Division eucl de a par $b \in \mathbb{N}$.

$$a = \underbrace{q}_{\text{quotient}} b + \underbrace{r}_{\text{reste}}$$

$0 \leq r < b$

Et pour ?

Plan :

- degré d'un polynôme,
- divisibilité pour les polynômes,
- division euclidienne.

Introduction

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps | $\mathbb{K}$ = Corps (« Korpen » en Allemand)

Reprenons l'introduction du chapitre 2 :

Pythagore $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais si on se place dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

De $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

- l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Mais si on cherche dans $\mathbb{C}$, on trouve deux solutions : i et $-\mathrm{i}$.

Si l'on considère l'écriture formelle $P(X) = X^2 + 1$ (que l'on peut penser dans un premier temps comme une fonction polynomiale), les nombres complexes i et $-\mathrm{i}$ vérifie $P(\mathrm{i}) = 0$ et $P(-\mathrm{i}) = 0$.

Peut-on réécrire $P(X)$ de façon à faire apparaître i et $-\mathrm{i}$?

$P(X) = (X+i)(X-i) \in \mathbb{C}[X]$

Les expressions $X^2 + 1$ s'appelle **des polynômes** et on note l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$.

$X^2 + \underline{1} \in \mathbb{Q}[X]$

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes.
Autrement dit :

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

1. Polynôme et degré

Un ***polynôme*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme :

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

$$\overset{\text{assimilé à}}{\equiv} (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

où

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ sont les ***coefficients*** du polynôme P,
- X est l'*indéterminée* du polynôme.

De plus si $a_n \neq 0$, alors

- n est le ***degré*** de P et on note $\deg(P) = n$,
- a_nX^n est le ***terme dominant*** de P,
  a_n est le ***coefficient dominant*** de P.

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont exactement les mêmes coefficients. On l'écrira $P = Q$ dans $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Quelques polynômes particuliers : on dit que P est

- le ***polynôme nul*** si tous ses coefficients sont nuls, noté $P(X)=0$. Par convention, $\deg(0)=-\infty$.
- un ***polynôme constant*** si tous ses coefficients sont nuls, sauf éventuellement a_0.
- un ***monôme*** si exactement un seul des a_i n'est pas nul. Par exemple :

$$P(X)=3X, \quad P(X)=X^5, \quad P(X)=\frac{1}{2}X^3, \quad \dots$$

$$\deg P \overset{\text{def}}{:=} \sup \{ k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq 0 \}$$

↳ $\deg(0) = \sup \emptyset =$ "le nombre" plus grand que personne $= -\infty$

On dit aussi que P est ***unitaire*** si son coefficient dominant vaut 1.

$$\Leftrightarrow \left(\deg P = n \Rightarrow a_n = 1 \right)$$

Par exemple,

$$P(X) = 5X^5 + \pi X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \sqrt{2}$$

est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ de degré 5, constitué de 4 monômes.

- Son terme dominant est $5X^5$.
- Son coefficient dominant est 5, P n'est donc pas unitaire.

« Polynôme » $\equiv$ Suite de coefficients dans $\mathbb{K}$) Algèbre

$\neq$

« Fonction polynômiale » $\equiv$ $f : E \to F$, $x \mapsto P(x)$) Analyse

a un graphe, un ens. de déf etc ...

$\deg P = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$

Question 1

Un polynôme peut-il être de degré 0 ?

- ❶ ~~Oui, mais alors il est obligatoirement nul~~
- ❷ Oui, et il peut être non-nul
- [✓ ❸ Oui, et il est obligatoirement non-nul]
- ❹ ~~Non~~

⚠ $\deg 0 = -\infty$

Remarque : Entre ② et ③, être nul donne

⚠ Source de BCP de confusion .

- Le polynôme nul $P(X) = 0$ est de degré $-\infty$.
- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants **non-nuls** : $P(X) = a_0$ avec $a_0 \neq 0$.

Definition

Soient n et m deux entiers. Nous définissons

$$X^n \times X^m := X^{n+m}.$$

Soient $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Nous définissons le produit $P \times Q$ par

Formule du produit de Cauchy

$$(P \times Q)(X) := \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k, \text{ avec } c_k := \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}.$$

Exemple

On a

$$(X^2+1)(X-2) = X^3 - 2X^2 + X - 2.$$

Proposition 1. ♥

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

❶ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

$a_n \neq 0$ & $b_m \neq 0$

Preuve : $\begin{cases} P(X) = a_n X^n + \cdots \\ Q(X) = b_m X^m + \cdots \end{cases}$ avec $\deg P = n$, $\deg Q = m$

et donc (par la formule de Produit de Cauchy) :

$$P \times Q(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec} \quad c_{n+m} = a_n \cdot b_m \neq 0$$

Donc $\deg(P \times Q) = n+m = \deg P + \deg Q$

Question 2

$= 4 + 2X - 3X^2 + \boxed{0 \times X^3}$

On considère le polynôme

$= 2X - \underline{2X^3} + 3 - 3X^2 + \underline{2X^3} + 1$

$$P(X) = (2X+3)(1-X^2) + (2X^3+1).$$

Quel est son degré ?

- ❶ 1
- [✓ ❷ 2]
- ❸ 3
- ~~❹ 4~~
- ~~❺ 5~~
- ~~❻ 6~~

Non car les termes dominants se simplifient !

Proposition 1. ♥

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

❶ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,

❷ $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Preuve de ② :
$$\begin{cases} P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & n = \deg P \\ Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \end{cases}$$

Alors $(P+Q)(X) = \sum c_k X^k$

où $c_k = a_k + b_k$ clairement nul si $k > \max(n, m) \Longleftrightarrow k > n \;\&\; k > m$

Donc $\deg(P+Q) \leqslant \max(n, m) = \max(\deg P, \deg Q)$ $\square$

$P = a_n X^n + \dots$
$Q = b_m X^m + \dots$

Proposition 2

- Pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$PQ = 0 \overset{①}{\iff} (P = 0 \text{ ou } Q = 0).$$

On dit que $\mathbb{K}[X]$ est ***intègre***.

- De la relation précédente, on déduit :

$$PQ = RQ \iff (Q = 0 \text{ ou } P = R).$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(P-R)Q = 0 \overset{①}{\iff} (P-R=0 \text{ ou } Q=0)$$

__Preuve__ : Par négation

Mq

$$(PQ \neq 0) \iff (P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0)$$

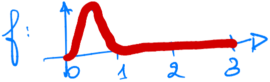
$$(P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0)$$
$$\iff a_n \neq 0, \ b_m \neq 0$$
$$\iff a_n b_m \neq 0$$
$$\iff \text{coeff dominant non nul de } PQ$$
$$\iff PQ \neq 0.$$

Remarque

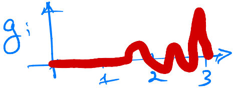
(C'est de l'algèbre et non de l'analyse!)

Attention, contrairement au produit de deux polynômes, le produit de deux fonctions peut être nul sans qu'aucune des deux ne le soit !

f :



g :



$\rightsquigarrow (f \times g)(x) = 0$
$\forall x \in [0,3]$

② $\deg Q = 0 \iff Q(X) = a \neq 0$ constante

Donc $P(Q) = P(a) =$ constante

Donc $\deg P(Q) \in \{0, -\infty\}$

③ $\deg Q = -\infty \iff Q = 0$

Donc $\deg P(Q) = \deg P(0) \leqslant 0$

Pareil !

⚠

composition ! (Produit déjà fait)

$P(Q) = P \circ Q$

Proposition 3

- ❶ Si $\deg(Q) \geqslant 1$ alors $\deg(P(Q)) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- ❷ Si $\deg(Q) = 0$, alors $\deg(P(Q)) \leqslant 0$.
- ❸ Si $\deg(Q) = -\infty$, alors $\deg(P(Q)) \leqslant 0$.

Preuve : ① Il suffit de le vérifier pour ~~$P(X)$~~ $= X^n$ puis sommer les monômes.

$$\deg P(Q) = \deg \underbrace{Q(X)^n} \overset{?}{=} n \deg Q(X)$$

$$Q(X) = \underbrace{a_k X^k}_{\text{Terme dominant}} + \dots$$

Donc $Q(X)^n = a_k^n . X^{nk} + \dots$ donc $\deg Q^n = nk$

$= n \deg Q$.

terme dominant

2. Divisibilité des polynômes

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

$$24 = 4 \times 6$$

On dit que 4 divise 24, ou de manière équivalente, que 24 est un multiple de 4.

Definition

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A ***divise*** B s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$. Dans ce cas, on dit aussi que B est un ***multiple*** de A.

C'est pareil dans $\mathbb{Z}$

Exemple

- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P \times 0 = 0,$$
donc tout polynôme P divise 0, mais 0 ne divise que 0.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P \times 1 = P,$$
donc 1 divise tout polynôme.
- Comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, les polynômes $X-1$ et $X+1$ divisent X^2-1.

$\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Question 3

Le polynôme $X^3 - 2X^2 - 3X$ est un multiple de

❶ X^3

❷ X^2

❸ $2X^2$

❹ $3X$

$$X^3 - 2X^2 - 3X = \underset{\sim\sim}{3X}\left(\underbrace{\frac{1}{3}X^2 - \frac{2}{3}X - 1}_{⚠\ \in\ \mathbb{K}[X]}\right)$$

Question 4

Le polynôme X^3+X^2+X+1 est un multiple de

❶ $X-2$ ❸ $X+1$

❷ $X-1$ ❹ $X+2$

⚠ • Si $\overset{A(X)}{=} X^3+X^2+X+1 = (X-a)\,Q(X)$

Alors $A(a) = (a-a)\,Q(a) = 0$

Tester la divisibilité par $X-a \iff$ Tester $A(a) \overset{?}{=} 0$

• Je n'ai pas calculé Q. En fait $X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+0.X+1)$
$= (X+1)(X^2+1)$

Proposition 4

La relation de divisibilité est :

❶ ***transitive*** : pour tous $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$,

$$(A \text{ divise } B) \text{ et } (B \text{ divise } C) \implies A \text{ divise } C,$$

❷ ***réflexive*** : pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, A divise A.

Preuve : ① $A \mid B \iff \exists\, Q_1 \in \mathbb{K}[X],\ Q_1 A = B$

$B \mid C \iff \exists\, Q_2 \in \mathbb{K}[X],\ Q_2 B = C$

Donc $Q_1 Q_2 A = Q_2(Q_1 A) = Q_2 B = C$

Donc $A \mid C$

② $A = A \times 1$

⚠ Analogue sur $\mathbb{N}$

de $a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{N},\ aq = b$

si $b \neq 0$ alors $b \geqslant 1$

et donc $q \geqslant 1$.

et donc $b \geqslant a$.

Proposition 5

Si A divise B et que $B \neq 0$ alors $\deg A \leqslant \deg B$.

Preuve : Il suffit de copier :

$A \mid B \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ A(X).Q(X) = B(X)$

Si $B \neq 0$ alors nécessairement $Q \neq 0$ (ce n'est pas le polynome nul.)

Donc $\deg Q \geqslant 0$

$$\rightsquigarrow \deg B = \deg AQ = \deg A + \deg Q$$

$$\geqslant \deg A.$$

3. Division euclidienne

Donc $Q_1 = Q_2$ seule possibilité
d'où $R_1 = R_2$.

Théorème 1. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ (existence admise)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes, avec $A \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$B = QA + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg A.$$

On dit que Q et R sont respectivement le ***quotient*** et le ***reste*** de la division euclidienne de B par A.

Démonstration.

Démontrons l'unicité de l'écriture lorsqu'elle existe. ☐

Rappel :

$$\begin{array}{r|l} 1175 & 7 \\ \hline -7 & 167 \\ 47 & \\ -42 & \\ 55 & \\ -49 & \\ 6 & \end{array}$$

$\rightsquigarrow 1175 = 7 \times 167 + 6$

Unicité : $B = Q_1 A + R_1$ deux écritures
$B = Q_2 A + R_2$

Donc $\underbrace{(Q_1 - Q_2)A}_{\text{si } Q_1 - Q_2 \neq 0 \ \deg \geq \deg A \text{ (Prop 5)}} = \underbrace{-(R_1 - R_2)}_{\text{de deg } \leq \deg R_1 < \deg A}$

⚠ Point méthode :

$$\begin{array}{l} X^4+7X^3-2X^2+8X-4 \\ = (X^2+1)(X^2+7X-3) \\ \quad + X - 1 \end{array}$$

↳ A vérifier en développant.

Exemple

Posons la division euclidienne de

$$B(X) = X^4+7X^3-2X^2+8X-4$$

par X^2+1.

$$\begin{array}{r|l}
B(X) = X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 8X - 4 & X^2+1 = A(X) \\ \cline{2-2}
-\left(X^4 + X^2\right) \qquad\qquad & X^2+7X-3 \\ \cline{1-1}
7X^3 - 3X^2 + 8X - 4 & = Q(X) \\
-\left(7X^3 + 0.X^2 + 7X\right) \quad & \\ \cline{1-1}
-3X^2 + X - 4 & \\
-\left(-3X^2 - 3\right) \qquad & \\ \cline{1-1}
X - 1 = R(X) &
\end{array}$$

Remarque

On peut parfois calculer facilement le reste d'une division euclidienne sans l'effectuer.

- Si $B(X)$ polynôme et $A(X) = X - 1$, la division euclidienne de B par A conduit à une expression de la forme

  $$B(X) = A(X)\,Q(X) + R(X),$$

  avec $\deg(R) < 1$. Donc $R(X) = a$ est une constante. Il suffit alors de calculer $B(1)$ pour trouver a puisque

  $$B(1) = (1-1)Q(1) + R(1) = a.$$

- Si $B(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ et $A(X) = X^2 - 1$, la division euclidienne de B par A conduit $R(X) = aX + b$. On trouve ensuite a et b en substituant successivement 1 à X et -1 à X dans la décomposition $\underset{B}{\cancel{A}}(X) = \underset{A}{\cancel{B}}(X)\,Q(X) + R(X)$.

Exercice

- Calculer le reste de la division euclidienne de $B(X) = 3X^2 + 2X - 1$ par $X + 1$.
- Calculer le reste de la division de $B(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ par $A(X) = X^2 - 4$.

À venir

- CC2 la semaine prochaine : bonnes révisions !
  - vendredi 20 novembre de 16h45 à 18h45
  - programme dans le document “syllabus” sur moodle
- TD 16 : préparer les questions 1 de l’exercice 1
- Dates limites DM WIMS :
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 15 novembre 2020
  - DM8 - Racines carrées et équations du second degré - 29 novembre 2020
  - DM9 - Polynômes, degré et multiplicité des racines - 6 décembre 2020
  - ...