Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 4 Octobre 2020

CM14 : Racines n-ièmes d'un nombre complexe

$a \in \mathbb{C}$

Remarque : Racines 2^e ≡ Racines carrées $X^2 - a = 0$

Racines n^e $X^n - a = 0$

Lien avec les trinômes

$X^2 + \alpha X + \beta = 0$

$\Leftrightarrow \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} = 0$

de la forme

$Y^2 - a = 0$

But : sous quelles conditions sur les affixes de A, B et C un triangle ABC est-il équilatéral ?

$(e^{i\pi/3})^3 = e^{i\pi} = -1$

Pas de théorie générale

~~Lien avec $P(X) = 0$~~

Plan :

- définir la notion de racine n-ième,
- en calculer certaines et les placer dans le plan complexe,
- les utiliser pour des applications (géométrie, factorisation de polynôme).

$k = 2p+1$

$e^{ik\pi} = e^{i(2p+1)\pi}$

$= \underbrace{e^{i2p\pi}}_{1} \times \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -1$

Question 1

L'égalité $e^{ik\pi} = -1$ est :

1. vraie seulement lorsque $k = 1$
2. ~~vraie seulement lorsque $k = 2$~~
3. vraie pour tout entier k impair
4. ~~vraie pour tout entier k pair~~
5. ~~jamais vraie~~

DEJA VU

Proposition 17

et c'est ce qu'on va utiliser !

L'égalité

$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}, \quad \text{avec } \rho, \rho' \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et } \theta, \theta' \in \mathbb{R},$$

est équivalente à

$$\rho = \rho' \quad \text{et} \quad \theta = \theta' + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\left(\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\theta}.$$

1. Racines n-ièmes

$z \in \mathbb{C}$ donné

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***racine n^ième^*** d'un nombre complexe z tout nombre complexe δ tel que

et on cherche δ

$$\delta^n = z.$$

On appelle ***racine n^ième^ de l'unité*** les racines n^ième^ de $z = 1$.

Remarque

Lorsque $n = 2$ ce sont les racines carrées.

identique

k	1	2	3	4	5	6	7	8
i^k	i	$i^2 = -1$	$-i$	$-i^2 = 1$	i	-1	$-i$	1

$\times i$ $\times i$ i

Exemple 4

Déterminer l'ensemble

$$\{\mathrm{i}^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}.$$

En déduire des racines 4-ièmes de l'unité.

$$i^k = \begin{cases} i & \text{si } k = 4p+1 \equiv 1\,[4] \\ -1 & \text{si } k = 4p+2 \equiv 2\,[4] \\ -i & \text{si } k = 4p+3 \\ 1 & \text{si } k = 4p. \end{cases}$$

On a : $\delta^n = z$

Question 2

Soit δ une racine n-ième de z. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. δ est aussi une racine n-ième de $\overline{z}$. $\delta^n = \overline{z}$?
2. $\overline{\delta}$ est une racine n-ième de $\overline{z}$. $\overline{\delta}^n = \overline{z}$?
3. $-\delta$ est une racine n-ième de z. $(-\delta)^n = z$? Vrai si n pair
4. $-\delta$ est une racine n-ième de $-z$. $(-\delta)^n = -z$? Vrai si n impair
5. Aucune des propositions précédentes n'est vraie.

$$(-\delta)^n = (-1)^n \delta^n$$

$(-1)^n = 1$ si n pair

ou -1 si n impair

(Suite de preuve) On écrit $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i0} \iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 0 \pmod{2\pi} = 2k\pi \end{cases}$$

⚠ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^n$ bijection avec $f^{-1}(x) = x^{1/n}$

Proposition 19

$\iff \rho = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble U_n des racines n-ièmes de l'unité est

$$U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \right\}$$
$$= \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\}.$$

Donc $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $k \in \mathbb{Z}$

Mais $e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n} + i2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

REPETITIONS

Donc on se restreint à $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Preuve : L'énoncé dit

$$U_n \overset{\text{def}}{:=} \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} \overset{\text{Prop 19}}{=} \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Remarque 1

Il y en a n.

$\supset$ Si $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ Alors $z^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\frac{2k\pi \cancel{n}}{\cancel{n}}} = e^{i2k\pi} = 1$

Donc OK.

$\subset$ Si $z^n = 1$ Alors a-t-on $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$?

Question 3

$$\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^n = e^{i\frac{3n\pi}{8}} \overset{?}{=} 1$$

Choisissez la bonne réponse.

1. $e^{\frac{3i\pi}{8}}$ est une racine 3-ième de l'unité.
2. $e^{\frac{3i\pi}{8}}$ est une racine 6-ième de l'unité.
3. $e^{\frac{3i\pi}{8}}$ est une racine 8-ième de l'unité.
4. $e^{\frac{3i\pi}{8}}$ est une racine 16-ième de l'unité.
5. Aucune des propositions ci-dessus n'est vraie.

$\frac{3n\pi}{8}$	n
$9\pi/8$	3
$\frac{18\pi}{8} = \frac{9\pi}{4}$	6
3π	8
6π	16

2. Représentation graphique des racines n-ièmes

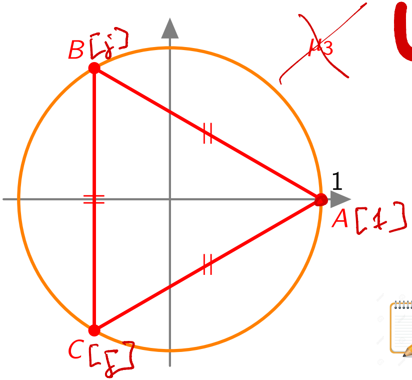
Exemple 5

Représenter dans le plan complexe

1. les racines cubiques de l'unité,
2. les racines 4-ièmes de l'unité,
3. les racines 5-ièmes de l'unité,
4. les racines 8-ièmes de l'unité.

Réponse en image

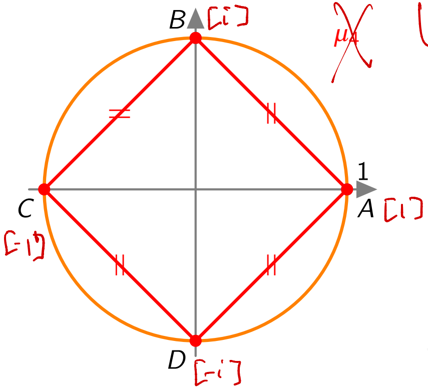
Représentons les racines cubique de l'unité :



$$\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{3}} ;\ k=0,1,2 \right\} = \left\{ 1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}} ;\ e^{i4\pi/3} \right\} = \left\{ 1 ;\ j ;\ \bar{j} \right\}$$

(Notation classique)

Représentons les racines 4-ièmes de l'unité :



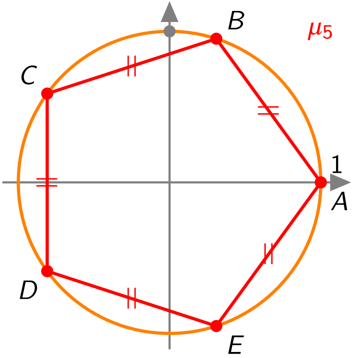
~~μ_4~~

$$\mathbb{U}_4 = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{4}} ; k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

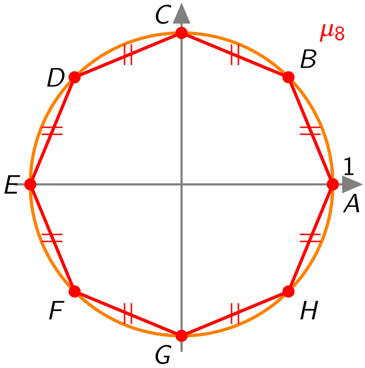
$$= \left\{ 1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} ; e^{i\pi} ; e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\}$$

$$= \{ 1 ; i ; -1 ; -i \}$$

Représentons les racines 5-ièmes de l'unité :



Représentons les racines 8-ièmes de l'unité :



Question 4

Le polygone μ_n admet pour axe de symétrie l'axe des abscisses.

1. Cette affirmation est fausse.
2. Cette affirmation est vraie.
3. Cette affirmation est vraie si et seulement si n est pair.
4. Cette affirmation est vraie si et seulement si n est impair.
5. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

$\Longleftrightarrow$ symétrique par $\overline{}$

$\Longleftrightarrow \left(\delta^n = 1 \Longleftrightarrow \overline{\delta}^n = 1 \right)$

$\delta^n = 1$

$\Longrightarrow (-\delta)^n = 1$?

Lorsque n pair

Question 5

Le polygone μ_n admet 0 pour un centre de symétrie.

1. Cette affirmation est fausse. $\Longleftrightarrow$ Symétrie de U_n pour $z \longmapsto -z$
2. ~~Cette affirmation est vraie.~~
3. Cette affirmation est vraie si et seulement si n est pair.
4. ~~Cette affirmation est vraie si et seulement si n est impair.~~
5. J'ai réfléchi mais je ne sais pas répondre.

Soit $z = \rho\, e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$\delta^n = z$? Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Les racines n-ièmes de z sont les nombres $\delta = r\, e^{i\alpha}$ vérifiant

$$\delta^n = (r\, e^{i\alpha})^n = r^n e^{i\,n\alpha} = \rho\, e^{i\theta}.$$

Cette égalité est équivalente à (par identificat° |.| & Arg)

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \text{pour un } k \in \mathbb{Z}.$$

$\Updownarrow$ sur car sur $\mathbb{R}_+$

$r = \rho^{1/n}$

Proposition 20

L'ensemble $R_n(z)$ des racines n-ièmes de z est

$$R_n(z) = \left\{ \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \right\}.$$

Remarque

Lorsque $z \neq 0$, il y a n racines n-ièmes de z.

$\parallel$

Card $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Exemple 6

Représenter dans le plan complexe

1. Les racines cubiques de 27.
2. Les racines 4-ièmes de $-25i$.
3. Les racines cubiques de $-2+2i$.

$$27 = 27\, e^{i0}$$

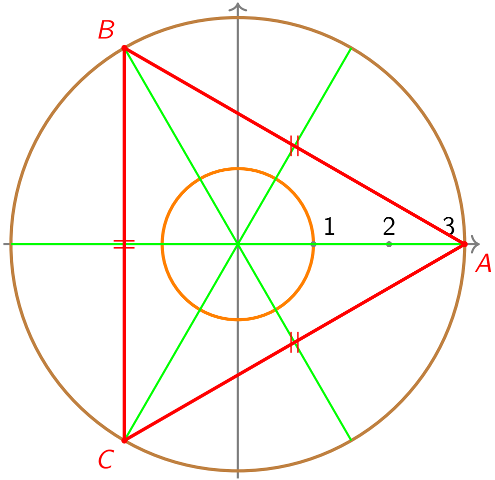
$$\hookrightarrow \mathcal{R}_n(27) = \left\{ 3 e^{i\frac{2k\pi}{3}} \;\middle|\; k = 0, 1, 2 \right\}$$

$$z = -2+2i \; ; \; |z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} + \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2}\,\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}_{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

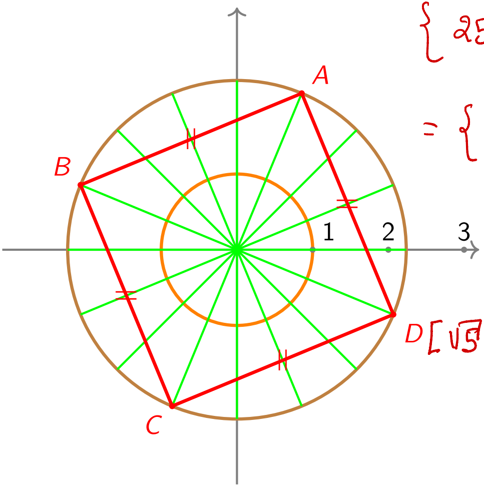
$$= 2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$$

Représentons les racines cubiques de 27.



$n=4$

Représentons les racines 4-ièmes de $-25\mathrm{i}$.



$-25i = 25\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\mapsto R_n(-25i) = \left\{ 25^{1/4} e^{i\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{4}\right)} \mid k = 0,1,2,3 \right\}$

$= \left\{ \sqrt{5}\, e^{-i\frac{\pi}{8}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{4}} \mid k = 0,1,2,3 \right\}$

$= \left\{ \sqrt{5}\, e^{-i\frac{\pi}{8}} \times \omega \mid \omega \in \{1, i, -i, -1\} \right\}$

$D\left[\sqrt{5}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}\right]$

3. Quelques applications

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

$\|$

À la résolution d'équations polynomiales

somme des termes consécutifs d'une suite géom de raison z

Exercice 17

Vérifier que

$$(z-1)\overbrace{(z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1)}=z^{n+1}-1.$$

En déduire les solutions $z\in\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^n+z^{n-1}+\cdots+z+1=0.$$

⚠ On a introduit la solution $z=1$.

$$\iff \begin{cases} 0=(z-1)(z^n+z^{n-1}+\cdots+1)=z^{n+1}-1 \\ z\neq 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z \text{ racine } (n+1)^e \text{ de } 1 \\ z\neq 1\end{cases} \iff z=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}},\quad k=\cancel{0},1,2,\ldots,n$$

À la factorisation de polynômes

Si $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, on appelle ***racine*** du polynôme P tout nombre complexe δ tel que $P(\delta) = 0$.
Nous verrons (dans le chapitre sur les polynômes) que si

$$P(\delta_1) = 0, P(\delta_2) = 0 \text{ et } P(\delta_3) = 0,$$

avec δ_1, δ_2 et δ_3 tous distincts alors

$$P(z) = (z - \delta_1)(z - \delta_2)(z - \delta_3).$$

Factorisat° dans $\mathbb{C}$

Factorisat° dans $\mathbb{R}$

Exemple

- Vérifier que i est racine de P. $P(i) = 1 + i + i^2 + i^3 = \cancel{1} + \cancel{i} + \cancel{(-1)} + \cancel{(-i)} = 0$
- En déduire que $-i$ est aussi racine de P. $0 = \overline{0} = \overline{P(i)} = P(\overline{i}) = P(-i)$
- Vérifier que -1 est aussi racine de P. $P(-1) = 1 - 1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- En déduire une factorisation de P.

Donc $P(z) = (z-i)(z+i)(z+1) = (z^2+1)(z+1)$

Exercice 18

Factoriser les polynômes suivants :

1. $P_1(z) = z^3 - 1.$
2. $P_2(z) = z^6 - 1.$
3. $P_3(z) = z^6 + 1.$
4. $P_4(z) = z^4 + z^2 + 1.$

$= \prod_{\omega \text{ racines } 3^e/6^e} (z - \omega)$

$P_3(z) = 0$

$\iff z^6 = -1$

$\iff z$ racine 6^e de $-1 = e^{i\pi}$

$\iff z = e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot e^{\frac{i2k\pi}{6}}$

$k = 0, 1, 2, \dots, 5$

$P_4(z) = 0 \iff z^4 + z^2 + 1 = 0$

$\iff \begin{cases} z^6 - 1 = 0 \\ z^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow (z^2-1)\times$

$\iff \begin{cases} z \text{ racine } 6^e \\ z \notin \{1, -1\} \end{cases}$ $\iff \dots$

ABC triangle équilatéral

$$\iff \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/3 \end{cases} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\pi/3}$$

$$\iff \begin{cases} |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \\ \operatorname{Arg} \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pi/3 \end{cases} \iff \frac{b-a}{c-a} = e^{-i\pi/3} \iff b - a = e^{-i\pi/3}(c-a)$$

À la géométrie

Exercice 19

Soient A d'affixe a, B d'affixe b, et C d'affixe c trois points distincts du plan complexe. Montrer que le triangle ABC est équilatéral (avec A, B et C positionnés dans le sens trigonométrique) si et seulement si

$$\bar{j} = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

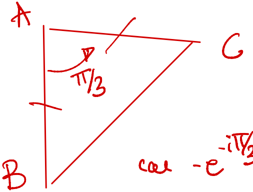
$$a + jb + j^2 c = 0,$$

$$\iff 0 = a - b + e^{-i\pi/3}(c-a)$$

$$= a(1 - e^{-i\pi/3}) - b + e^{-i\pi/3} c$$

où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$1 - e^{-i\pi/3} = 1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$



$$\iff 0 = a e^{+i\pi/3} - b + c e^{-i\pi/3}$$

$$\iff 0 = a + b\underbrace{(-e^{-i\pi/3})}_{j} + c \underbrace{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}_{j^2}$$

car $-e^{-i\pi/3} = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

À venir

- CC2 dans 2 semaines
  - à priori en présentiel.
  - en attente de confirmation de la FSI.
- TD 14 : préparer la question 1 de l'exercice 27
- Dates limites DM WIMS :
  - DM6 - Nombres complexes - 8 novembre 2020
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 15 novembre 2020
  - DM8 - Racines carrées et équations du second degré - 29 novembre 2020
  - ...