Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Jeudi 22 Octobre 2020

CM13 : Racines carrées d'un nombre complexe

Lien avec la résolut° de trinômes $\Delta = b^2 - 4ac$

But : donner **les racines carrées** de $-3+4i$ et **résoudre** (dans $\mathbb{C}$) l'équation de degré 2

$$z^2 - z + 1 - i = 0.$$

$= 1 - 4(1-i)$

$= -3 + 4i$

Plan :

- racines carrées d'un nombre complexe,
- calcul avec la forme algébrique ou avec la forme exponentielle,
- résoudre une équation du second degré.

1. Racines carrées

TOUS

Soit x un nombre **réel**. Les racines carrées de x sont les nombres y satisfaisant $y^2 = x$.

- Si $x > 0$ alors x admet deux racines carrées **réelles** :

$$\sqrt{x} \text{ et } -\sqrt{x}.$$

« LES » Racines.

« LA » racine

- Si $x = 0$ alors il n'y a que 0.
- Si $x < 0$ alors x n'admet pas de **racine réelle** ! Mais x admets deux racines **complexes** :

$$\mathrm{i}\sqrt{-x} \text{ et } -\mathrm{i}\sqrt{-x}.$$

« LES » racines

~~« LA » racine ?~~ NON

« UNE »

Definition

On appelle ***racine carrée*** d'un nombre complexe z tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = z$.

Remarque

Pour tout entier n, on appelle ***racine n-ème*** d'un nombre complexe z, tout nombre δ qui satisfait $\delta^n = z$.

$z = (1+5i)^2 = 1 - 5^2 + 2 \times 5i = -24 + 10i$

Question 1

$\delta = -24 + 10i$

Supposons que le nombre $1+5i$ est une racine de z. On peut affirmer que :

1. $1-5i$ est aussi une racine de z.
2. $-1-5i$ est aussi une racine de z.
3. $-1+5i$ est aussi une racine de z.
4. aucune réponse n'est correcte.

$(-\delta)^2 = (-1)^2 \delta^2 = 1 \times \delta^2 = z$

Théorème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe exactement deux racines carrées de z qui sont opposées l'une de l'autre : δ et $-\delta$.

Démonstration.

Démonstration 1 :
avec la forme algébrique

Démonstration 2 :
avec la forme exponentielle

Remarque

Si $z = 0$ alors la seule racine carrée est 0.

2. Calcul : forme algébrique ou exponentielle

Bilan : Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous cherchons une racine carrée $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ tel que $\delta^2 = z$. L'autre racine carrée sera $-\delta$.

Méthode 1 :

Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha^2+\beta^2 & = & |z| \\ \alpha^2-\beta^2 & = & Re(z) \\ 2\alpha\beta & = & Im(z). \end{array}\right.$$

Méthode 2 :

❶ Mettre z sous forme exponentielle :

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}.$$

❷ On a alors $\delta = \sqrt{|z|}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Question 2

Choisissez la bonne réponse :

1. ~~Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $25e^{i\frac{\pi}{14}}$.~~
2. ~~Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $25e^{i\frac{\pi}{7}}$.~~
3. ~~Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $25e^{i\frac{2\pi}{7}}$.~~
4. Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $\sqrt{5}e^{i\frac{15\pi}{14}}$.
5. ~~Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $\sqrt{5}e^{i\frac{2\pi}{7}}$.~~
6. Une racine carrée de $5e^{i\frac{\pi}{7}}$ est $\sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{14}}$.
7. Aucune des réponses précédentes.

$\frac{\pi}{14} + \pi = \frac{15\pi}{14}$

$\frac{\parallel}{\pi}$

$+ \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{7}$?

$-\frac{1}{2}$?

① Formes trigo non accessibles ! ⤳ Méthode 1

$\delta = \alpha + i\beta$ $\quad z_2 = \delta^2 \iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = |z_2| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \\ \alpha^2-\beta^2 = \operatorname{Re} z_2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha^2 = (\sqrt{13}+3)/2 \leadsto \alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} \\ \beta^2 = (\sqrt{13}-3)/2 \leadsto \beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}} \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$

Exercice 11

Donc $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}$ ou l'opposé.

❶ Calculez les racines carrées de $z_2 = 3+2i$ et de $z_4 = 1-7i$.

❷ Calculer les racines carrées de $z_1 = 1-i$ et de $z_3 = 5\sqrt{3}+5i$.

② Formes trigo

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$

$z_3 = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 10\,e^{i\pi/6}$

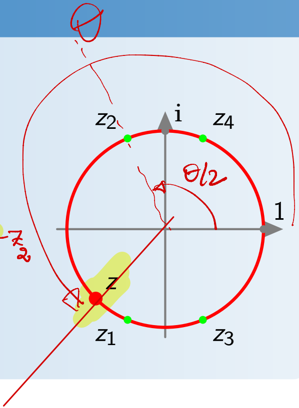
⤳ racines de z_1 : $\pm 2^{1/4} \cdot e^{-i\pi/8}$

racines de z_3 : $\pm\sqrt{10} \cdot e^{i\pi/12}$

Question 3

Choisissez la bonne réponse :

1. Les racines carrées de z sont z_1 et z_2.
2. Les racines carrées de z sont z_1 et z_3.
3. Les racines carrées de z sont z_1 et z_4.
4. Les racines carrées de z sont z_2 et z_3 $= -z_2$
5. Les racines carrées de z sont z_2 et z_4.
6. Les racines carrées de z sont z_3 et z_4.



3. Équation du second degré

Nous cherchons à résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

pour a, b, $c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

Ainsi $0 = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$

$= \left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right) = (z-z_1)(z-z_2)$

$\boxed{\Delta = \delta^2 \text{ dans } \mathbb{C}}$

Proposition 16. ♥

↳ Deux racines.
(Double si $\delta = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$)

Appelons $\Delta := b^2 - 4ac$ le ***discriminant*** de l'équation, et δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ. Alors,

1. si $\Delta = 0$, l'équation (E) n'a qu'une seule solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$,
2. si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) a deux solutions (racines) distinctes qui sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Preuve : Même qu'avant (à des petits détails près !)

$0 = a z^2 + b z + c$

$\Leftrightarrow 0 = z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\Leftrightarrow 0 = \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$

$\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = \delta^2/4a^2$

Méthode pour résoudre l'équation du second degré :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

si $\Delta > 0$, c'est bien défini donc OK

si $\Delta \in \mathbb{C}$, il y a 2 racines. Laquelle ?

! Ne jamais utiliser l'expression $\delta = \sqrt{\Delta}$

$\in \mathbb{C}$!

❶ Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

❷ Calculer les racines carrées δ et $-\delta$ de Δ.

Pas une mince affaire !

❸ Les solutions sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 1 - 4 \times 372 \times 153 < 0$
$\Rightarrow 1$

Les racines carrées de Δ sont $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et $-\delta$

Les racines sont $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Question 4

Soit z_1 une solution de l'équation $153z^2 - z + 372 = 0$. Alors

1. $-z_1$ est une autre racine.
2. $\overline{z}_1$ est une autre racine.
3. Il n y a pas d'autre racine.
4. Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Coefficients complexes !

Question 5

Soit z_1 une solution de l'équation $36z^2 - iz + 522 = 0$. Alors

1. ~~$-z_1$ est une autre racine.~~
2. $\overline{z}_1$ est une autre racine.
3. ~~Il n y a pas d'autre racine.~~
4. Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

Se méfier. Toujours vrai si les coeffs sont réels et $\Delta < 0$

Mais ici $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-i)^2 - 4 \times 36 \times 522$

$= -1 - 4 \times 36 \times 522$

réel m̂ si coeff complexes

Donc racine $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

① $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1-i) = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$

$\delta = x + iy \quad \Delta = \delta^2 \iff (x+iy)^2 = -3+4i$

Exercice 15

$|\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\iff x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i$

$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = |\delta|^2 = 5 \text{) Astuce} \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases} ; \; y^2 = \frac{5+3}{2} = 4 ; \; xy = 2$

$\iff x = \pm 1 ; \; y = \pm 2 ; \; xy = 2$

Déterminez les solutions des équations

❶ $z^2 - z + 1 - \mathrm{i} = 0$,

❷ $4z^2 - 4z + 9 - 6\mathrm{i} = 0$,

❸ $z^2 + (\mathrm{i} - 1)z - \mathrm{i} = 0$.

Donc $\delta = x + iy = 1 + 2i$ ou $\delta = -1 - 2i$

Remarque

On dit aussi que les solutions précédentes sont les racines des polynômes

Dans les deux cas $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$

❶ $P_1(X) = X^2 - X + 1 - \mathrm{i}$,

❷ $P_2(X) = 4X^2 - 4X + 9 - 6\mathrm{i}$,

❸ $P_3(X) = X^2 + (\mathrm{i} - 1)X - \mathrm{i}$.

③ $\Delta = b^2 - 4ac = (i-1)^2 - 4 \times 1 \times (-i)$

$= \underline{1 - 1} - 2i + 4i = 2i = 2e^{i\pi/2}$

Donc je choisis $\delta = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ et $-\delta$ est l'autre racine.

⚠ Calcul de δ tq $\delta^2 = \Delta$, 2 méthodes $\begin{cases} \text{Forme alg} \\ \text{Forme trig} \end{cases}$

À venir

- CC2 bientôt
  - Semaine 16-20 nov 2020
  - programme dans le document “syllabus” sur moodle

- TD 13 : préparer le nombre complexe z_1 de l’exercice 20

- Dates limites DM WIMS :
  - DM6 - Nombres complexes - 8 novembre 2020
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 15 novembre 2020
  - DM8 - Racines carrées et équations du second degré - 29 novembre 2020
  - ...