Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 21 Octobre 2020

CM12 : Transformations du plan

But : décrire une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre l'origine à l'aide des nombres complexes.

Plan :

- les nombres complexes pour faire de la géométrie,
- les translations,
- les rotations.

1. Nombres complexes et géométrie

Definition

Dans un plan $\mathscr{P}$, le ***cercle $C(\Omega, r)$ de centre Ω et de rayon $r > 0$*** est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ à distance r de Ω, c'est-à-dire

$$C(\Omega, r) := \{M \in \mathscr{P} \text{ tel que } ||\overrightarrow{\Omega M}|| = r\}.$$

Exercice 9

Soit Ω le point de coordonnées $(1, 0)$. Dessiner le cercle $C(\Omega, 1)$.

Exercice 10

Donner les définitions de $\overrightarrow{AB}$ et de $||\overrightarrow{AB}||$ en fonction des coordonnées de A et B ? Donner les définitions équivalentes en utilisant les affixes z_A et z_B des points A et B.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

def équivalentes

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ d'affixe } z_B - z_A \\ ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A| \end{cases}$$

Proposition 14. ♥

Soit Ω un point du plan d'affixe $z_\Omega \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ appartient au cercle $C(\Omega, r)$ si et seulement si

$$|z - z_\Omega| = r.$$

$$M[z] \in C(\Omega, r) \iff \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r \iff |z - z_\Omega| = r$$

Cette équation s'écrit aussi

$$z\bar{z} - \overline{z_\Omega} z - z_\Omega \bar{z} + \gamma = 0, \qquad (1)$$

avec $\gamma = |z_\Omega|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$.

Preuve

Formulation équivalente de

$$|z - z_\Omega| = r \iff r^2 = |z - z_\Omega|^2 = |z|^2 - z\overline{z_\Omega} - \bar{z} z_\Omega + |z_\Omega|^2$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$\iff |z|^2 - z\overline{z_\Omega} - \bar{z} z_\Omega + \underbrace{|z_\Omega|^2 - r^2}_{\gamma} = 0$$

Question 1

L'ensemble des points M du plan ayant leur affixe z qui vérifie

$$|z+3-i| \leqslant 2 \iff |z - z_\Omega| \leqslant 2$$

$$\Omega[z_\Omega] \iff M\Omega \leqslant 2$$

avec $z_\Omega = -3+i$

est :

❶ un disque,

❷ un cercle,

❸ un segment,

❹ une demi-droite,

❺ une droite.

Question 2

L'ensemble M des points du plan ayant son affixe z qui vérifie

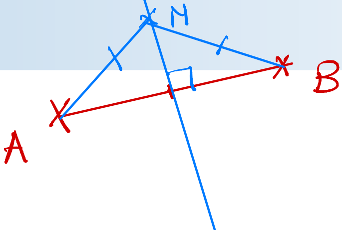
$$|z-3+i| = |z-2+4i| \iff MA = MB$$

$A[z_A]$, $B[z_B]$

où $\begin{cases} z_A = 3-i \\ z_B = 2-4i \end{cases}$

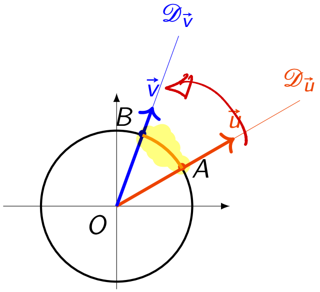
est :

1. un disque,
2. un cercle,
3. un segment,
4. une demi-droite,
5. une droite.

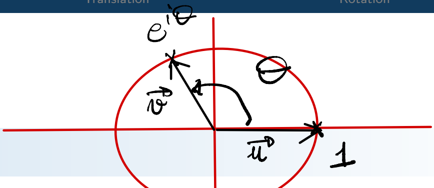


Definition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\mathscr{D}_{\vec{u}}$, $\mathscr{D}_{\vec{v}}$ les demi-droites associées. On note A et B les points d'intersection respectifs des demi-droites $\mathscr{D}_{\vec{u}}$ et $\mathscr{D}_{\vec{v}}$ avec le cercle trigonométrique. L'***angle orienté*** $(\vec{u}, \vec{v})$ (en radians) est la longueur de l'arc de cercle délimité par A et B parcouru dans le sens direct.



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ \overrightarrow{OB} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \end{cases}$$



Exercice 11

Calculer l'angle orienté entre le vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1 et le vecteur $\vec{v}$ d'affixe $e^{i\theta}$.

Réponse : θ !

le quotient est $e^{i\theta}$ (*)

Donc $e^{i\theta} = \frac{z_B}{|z_B|} / \frac{z_A}{|z_A|}$

Donc $\theta = \arg e^{i\theta}$
$= \arg z_B / z_A$ ▯

Proposition 15

Soit O l'origine d'un plan et A et B deux points du plan, distincts de O. On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B. L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est donné par l'argument du nombre complexe $\frac{z_B}{z_A}$.

Preuve: C'est un jeu de reformulation

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \overset{?}{=}$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rightsquigarrow$ normalise $\vec{u} = \frac{z_A}{|z_A|}$; $\vec{v} = \frac{z_B}{|z_B|}$

angle $\rightsquigarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ tq (*)

Definition

Une application bijective du plan dans lui-même est appelée ***transformation***.

Le but d'aujourd'hui est d'étudier :

- les translations,
- les rotations,
- mais ce ne sont pas les seules transformations.

$p : \mathbb{C} \to D$ surj.

① $\mathrm{Im}\, p = D$ par déf

Donc non surj ! ($D \neq \mathbb{C}$)

② Pas inj :

Toute la droite $\perp$ à D passant par A' est projetée sur A'.

Question 3

Est-ce que la projection orthogonale $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sur la droite D représentée ci-contre est une transformation du plan ?

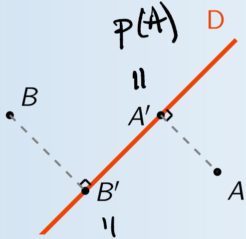
❶ Oui,

❷ Non car p est surjective mais pas injective,

❸ Non car p est injective mais pas surjective,

❹ Non car p n'est ni injective, ni surjective.

$p(A) = A'$



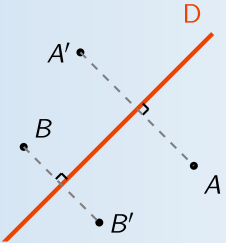
$B' = p(B)$

$s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Question 4

Est-ce que la symétrie axiale s d'axe D représentée ci-contre est une transformation du plan ?

1. Oui,
2. Non car s est surjective mais pas injective,
3. Non car s est injective mais pas surjective,
4. Non car s n'est ni injective, ni surjective.



Involution.

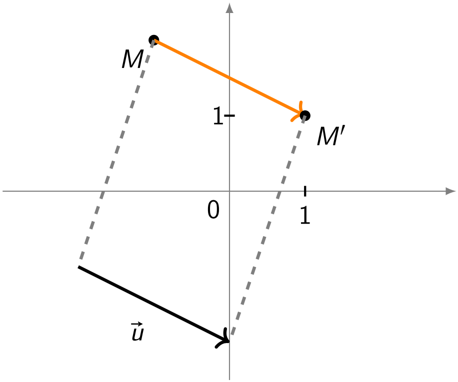
$s \circ s = id_{\mathbb{C}} \iff s^{-1} = s$

$$\begin{cases} s(A) = A' \\ \rightsquigarrow s(A') = A \\ \rightsquigarrow s \circ s(A) = A \end{cases}$$

2. Translation

Definition

La ***translation*** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



$\vec{u}[a]$

Théorème 1

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe a. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée par l'application

$$t_{\vec{u}} = t : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+a. \end{array}$$

Démonstration.

Si $\begin{cases} M[z] \\ \vec{u}[a] \end{cases}$ Alors $M'[t(z)]$

Par exercice d'écriture

Par déf de la translation,

on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

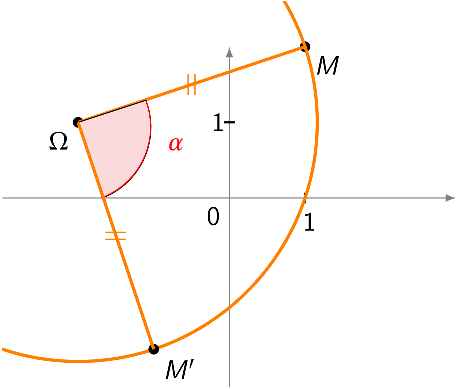
Or $\overrightarrow{MM'}[t(z)-z]$ Donc $t(z) - z = a$

Donc $t(z) = z + a$

3. Rotation

Definition

La ***rotation*** de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$.



Exercice 13. Complexes et transformations du plan

1. Étude d'un cas particulier :
   On définit ~~r~~ comme l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

   R

   DEF:

   $$\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)+3.}$$

   $z \longmapsto z'$

   a) Placez les points $A = [3i]$, $B = [3]$ et $C = [3+3i]$.
   b) Placez les points $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ et $C' = R(C)$ après avoir calculé leurs affixes.
   c) Que semble faire la transformation r ?

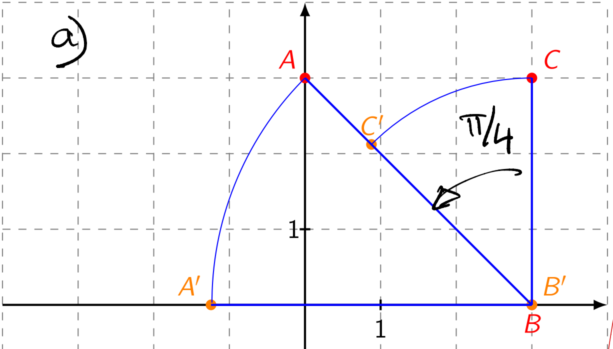
$e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

1) b) $z_A' = e^{i\pi/4}(3i-3) + 3 = -(\sqrt{2} - i)3$

$z_B' = e^{i\pi/4}(3-3) + 3 = 3 = z_B$

$z_C' = e^{i\pi/4}(\cancel{3}+3i-\cancel{3}) + 3 = 3i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 3$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i) + 3 = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\,3\sqrt{2}/2$



c) Il semblerait que R soit la rotation $\begin{cases} \text{de centre } B \\ \text{d'angle } \pi/4 \end{cases}$

Remarque

- Centre = Pt fixe
- l'Angle θ apparaît par $e^{i\theta}$

⚠ · Point fixe

$r(\omega) = e^{i\theta}(\omega-\omega)+\omega = \omega$

· L'angle apparaît par $e^{i\theta}$

Exercice 13. Complexes et transformations du plan

❷ Étude du cas général :

On définit à présent r comme la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$\boxed{z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.}$$

vu avant, Argument du ratio des affixes

ⓐ Démontrez que M et M' sont sur un cercle de centre $\Omega(\omega)$.

ⓑ Calculez $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \operatorname{Arg}\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = \operatorname{Arg} e^{i\theta} = \theta.$

ⓒ Que peut-on conclure ?

2) a) M et M' sur cercle de centre $\Omega[\omega]$

$\Leftrightarrow M\Omega = M'\Omega$

$\Leftrightarrow |z-\omega| = |z'-\omega|$

Vrai ou faux ? $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) + \cancel{\omega} - \cancel{\omega}$

$\leadsto |z'-\omega| = |e^{i\theta}(z-\omega)| = |z-\omega|$

* Il ne reste plus que la preuve que $z \mapsto az+b$ est bien de la forme $z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.

Calcul :
$\begin{cases} z' = az+b \\ \omega = a\omega+b \end{cases}$ $\ominus$ $\leadsto$ $z'-\omega = a(z-\omega) = e^{i\theta}(z-\omega)$

Donc $\boxed{z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega}$

Théorème 2. Écriture complexe d'une rotation

1. L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ (en radians) est

$$\boxed{z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.}$$

Vu à l'ex précédent

2. Réciproquement, toute transformation s'écrivant $z \mapsto az+b$, avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$, est une rotation dont **le centre** $\Omega(\omega)$ **vérifie**

$$\omega = a\omega + b.$$

Preuve de 2 : Si $a = 1$, $z \mapsto z+b$, c'est une translation.

Si $a \neq 1$, $|a| = 1$ alors démontrons que c'est une rotation.

* Centre $\Omega[\omega]$? C'est un pt fixe. $\omega = a\omega + b \iff \omega(1-a) = b \iff \omega = b/(1-a)$ UNIQUE

On l'a trouvé

* Angle θ ? $|a| = 1$ donc $a = e^{i\theta}$

$$\begin{cases} e^{i\pi/3} \\ \omega = 1+2i \end{cases}$$

Question 5

Soit $\Omega(1,2)$ un point du plan. Comment s'exprime la rotation $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$?

1. $r(z) = e^{-i\pi/3}(z-1-2i)+1+2i$,
2. $r(z) = e^{-i\pi/3}(z+1+2i)-1-2i$,
3. $r(z) = e^{i\pi/3}(z-1-2i)+1+2i$,
4. $r(z) = e^{i\pi/3}(z+1+2i)-1-2i$.

* Angle θ ?

$z' - \omega = iz - 2 - 4i - (1-3i) = iz - 2 - 4i - 1 + 3i$

$= iz - 3 - i = i(z + 3i - 1)$

$= i(z - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$ $\quad e^{i\theta} = i$

$\iff \theta = \pi/2 \ (\text{mod } 2\pi)$

Exercice 13. Complexes et transformations du plan

❸ Applications : démontrez que la transformation qui à tout point $M(z)$ du plan associe le point M' d'affixe

$$z' = \mathrm{i}z - 2 - 4\mathrm{i}$$

est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

Par le thm, c'est une rotation

car on reconnait $z' = az + b$

* Centre $\Omega[\omega]$? Point fixe $\omega = i\omega - 2 - 4i$

$\iff \omega(1-i) = -(2+4i)$

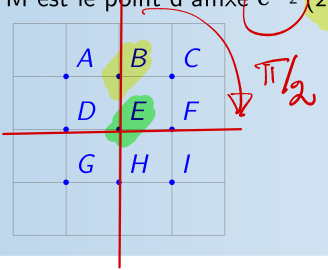
$\iff \omega = -\dfrac{(2+4i)}{1-i}$

$1 - 3i \quad = \dfrac{-(-2+6i)}{2} = -\frac{1}{2}(2 - 4 + 6i) = \dfrac{-(2+4i)}{2}(1+i)$

$e^{i\theta}$ $\theta = -\pi/2$

Question 6

M est le point d'affixe $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}(z_B - z_E) + z_E$ donc M est confondu avec :



1. ~~A~~
2. B
3. ~~C~~
4. D
5. E
6. F
7. ~~G~~
8. H
9. ~~I~~
10. Autre

À venir

- TD 12 : préparer l'exercice 13

- Dates limites DM WIMS :
  - DM5 - Intégrales et primitives - 25 octobre 2020
  - DM6 - Nombres complexes - 8 novembre 2020
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 15 novembre 2020
  - ...