Chapitre 2 : Nombres complexes

Reda Chhaibi

Bureau 212 – Bâtiment 1R2
reda.chhaibi@math.univ-toulouse.fr

Mercredi 14 Octobre 2020

CM10 : Les nombres complexes : forme algébrique

But du chapitre : étudier les nombres complexes et les utiliser pour faire

- de la géométrie (dans le plan),
- de l'algèbre (factorisation de polynômes) et
- de l'analyse (fonctions trigonométriques).

But du cours : savoir placer $\overline{1+i}$ dans un plan et savoir multiplier et diviser par $1+i$.

Plan du cours :

- interprétation géométrique,
- opérations sur les nombres complexes,
- argument et module d'un nombre complexe.

Introduction

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\subset \mathbb{H}$

$\subset \mathbb{O}$

- L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais si on se place dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Nous allons introduire un nouvel ensemble de nombres pour que cette équation ait comme dans le cas réel deux solutions (historiquement les choses se sont passées différemment).

Cet ensemble s'appelle **les nombres complexes et on le note $\mathbb{C}$.**

On note i et $-\mathrm{i}$ les solutions de cette équation.

1. Interprétation géométrique

Definition

Les ***nombres complexes*** sont les nombres de la forme

$$z = a + \mathrm{i}b,$$

où

- $a, b \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

- Le réel a est appelé ***partie réelle*** de z, noté $a = Re(z)$.
- Le réel b est appelé ***partie imaginaire*** de z, noté $b = Im(z)$.

Dans tout ce cours, on considère $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

On a

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{R}e(z) & = & \mathscr{R}e(z'), \\ \mathscr{I}m(z) & = & \mathscr{I}m(z'). \end{cases}$$

Par conséquent, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & z = a + ib \end{array}$$

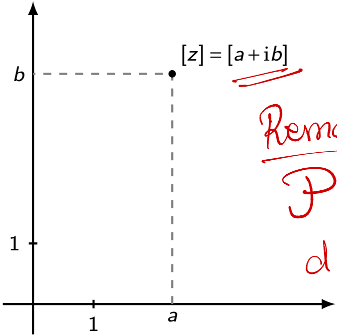
est une bijection. $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) \mapsfrom z$

Exercice 1

Quelle est la bijection réciproque ?

12 $\mathbb{R}^2$

On se donne un plan $\mathscr{P}$ et un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On peut alors mettre en bijection $\mathbb{C}$ et $\mathscr{P}$.



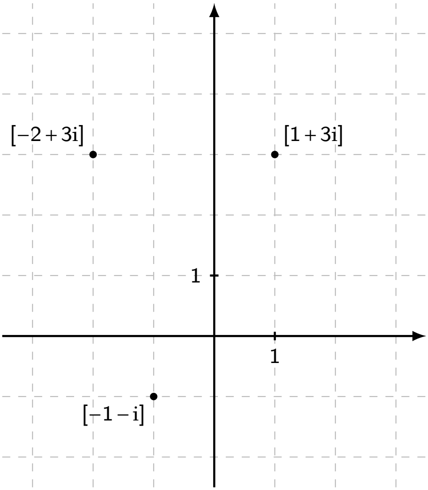
Remarque

$\mathscr{P} \equiv$ Plan d'Argan - Cauchy

Pour un point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées (a, b), le complexe $z_M := a + ib$ est appelé ***affixe de M*** ou ***affixe de $\overrightarrow{OM}$***.
Notation : $[z]$ est le point M dont l'affixe est z.

Exercice 4

Plaçons dans un plan d'Argand–Cauchy les points d'affixes $1+3i$, $-2+3i$ et $-1-i$.


[−2 + 3i]
[1 + 3i]
1
1
[−1 − i]

Pour votre culture :

THM : Une relation d'ordre n'existe pas sur $\mathbb{C}$

z x x z' $\operatorname{Im} z = -1$

Question 1

Si on note $z = -1 - \mathrm{i}$ et $z' = 1 - \mathrm{i}$, nous avons

1. $z < z'$, ??
2. $z > z'$,
3. $z = z'$, NON
4. aucune des réponses précédentes.

$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z' \end{cases}$

* Existe-t-il une relation $\leq$ entre nombre complexes d'ordre ?

$z < z' \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} z \leq z' \\ \& \quad z \neq z' \end{cases}$

① $z \leq z'$ & $z' \leq z \implies z = z'$ ③ $z \leq z$

② $z \leq z'$ & $z' \leq z'' \implies z \leq z''$

2. Opérations sur les nombres complexes

$(a, b, c) + (a', b', c') = (a+a', b+b', c+c')$

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes. Nous pouvons :

- les additionner : $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$ ← terme à terme
- les multiplier : $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$

(Sans surprise)

Exercice 2

Quelles sont les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ et $(1+\mathrm{i})^2$?

$$i(1+i) = i + i^2 = -1 + i = -1 + \underline{\underline{1}} \times i$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\, i(1+i) = \underline{\underline{-1}} \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}\, i(1+i) = \underline{\underline{1}} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(1+i)^2 = 1^2 + 2i \times 1 + i^2 = \cancel{1} - \cancel{1} + 2i$$

$$= 2i = \underline{\underline{0}} + 2i$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Re}\,(1+i)^2 = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathrm{Im}\,(1+i)^2 = \underline{\underline{2}}$$

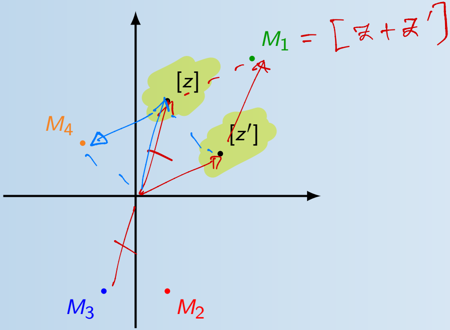
$$\begin{cases} Im\ iz = ? \\ Re\ iz = ? \end{cases}$$

Question 2

Quelles sont les parties réelles et imaginaires de iz ?

1. $\begin{cases} Re(\mathrm{i}z) = Re(z) \\ Im(\mathrm{i}z) = Im(z) \end{cases}$
2. $\begin{cases} Re(\mathrm{i}z) = -Re(z) \\ Im(\mathrm{i}z) = -Im(z) \end{cases}$
3. $\begin{cases} Re(\mathrm{i}z) = Im(z) \\ Im(\mathrm{i}z) = Re(z) \end{cases}$
4. $\begin{cases} Re(\mathrm{i}z) = -Im(z) \\ Im(\mathrm{i}z) = Re(z) \end{cases}$

Question 3



Étant donnés les points d'affixes z et z' ci-contre, on a

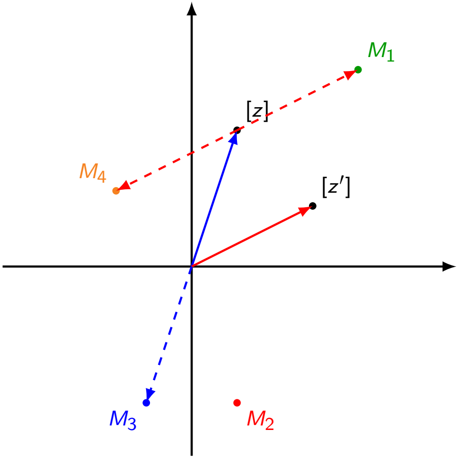
❶ $M_2 = [-z],\ M_1 = [z+z']$ et $M_4 = [z-z']$,

❷ $M_2 = [-z],\ M_4 = [z+z']$ et $M_1 = [z-z']$,

❸ $M_3 = [-z],\ M_1 = [z+z']$ et $M_4 = [z-z']$,

❹ $M_3 = [-z],\ M_4 = [z+z']$ et $M_1 = [z-z']$.

Réponse en image :



Proposition 2

Si A et B ont pour affixes z_A et z_B. Alors

$\overrightarrow{AB} = B - A$

$= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$= [z_B - z_A]$

1. le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$,
2. le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$,
3. pour $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ les vecteurs d'affixes z et z' et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   a) $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$,
   b) $\lambda \vec{w}$ a pour affixe λz.

Bref, tout se passe bien :

- $+$ dans $\mathbb{C}$ correspond à l'addition de 2 vecteurs,
- la multiplication de $z \in \mathbb{C}$ par un réel λ correspond à la multiplication d'un vecteur d'affixe z par λ.

Exercice 5

Soit $A = [-1 - \mathrm{i}]$, $B = [2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}]$, $C = [\frac{5}{2} + \mathrm{i}]$ et $D = [\frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i})]$ quatre points.
Démontrez d'au moins deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

On dit que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

Les opérations + et × ont les propriétés suivantes :

VOCABULAIRE

- Elles sont ***associatives*** :

$$z+(z'+z'')=(z+z')+z'' \text{ et } z(z'z'')=(zz')z''.$$

- Elles sont ***commutatives*** :

$$z+z'=z'+z \text{ et } zz'=z'z.$$

⚠ Point culture

- La multiplication est ***distributive*** par rapport à l'addition :

$$z(z'+z'')=zz'+zz''.$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

$\subset \mathbb{O}$

Hors programme

- L'***élément neutre*** pour l'addition est $0 := 0 + \mathrm{i}0$.
- L'***élément neutre*** pour la multiplication est $1 := 1 + \mathrm{i}0$.
- L'***opposé*** de $z = a + \mathrm{i}b$ est $-z := -a - \mathrm{i}b$.
- L'***inverse*** de $z \in \mathbb{C}^*$ est $\dfrac{1}{z}$, que l'on note parfois z^{-1}.

Pour résumé, les règles opératoires valables pour les nombres réels le sont pour les nombres complexes.

Attention : le signe $\leqslant$ n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.

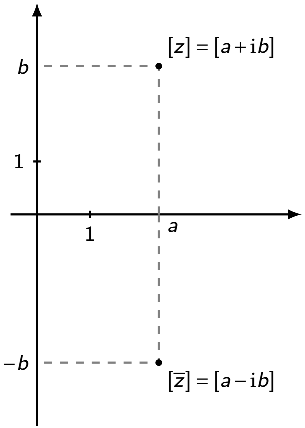
3. Conjugaison et module

Definition

Soit $z := a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. On appelle ***conjugué de z*** et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} := a - \mathrm{i}b.$$

Plaçons $\overline{z}$ sur le plan d'Argand-Cauchy :



La conjugué de z est son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

$(-i)\times(-i) = -1$.

Proposition 1. Propriétés de la conjugaison

Soit z et z' des nombres complexes. Alors :

$z = a+ib$

$z' = a-ib$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
5. $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
6. $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
7. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

Démonstration.

① OK

② OK

$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z}+\overline{z'}$

③ $\overline{z z'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa'-bb' + (ab'+a'b)i}$

$= (aa'-bb') - i(ab'+a'b)$

$\overset{?}{=}$

$\overline{z}\,\overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa' + (-ib)(-ib') - iba' - ib'a$ OUI

Question 4

Quel est le conjugué de $z + \mathrm{i}\overline{z}$?

1. $z + \mathrm{i}\overline{z}$
2. $\overline{z} + \mathrm{i}z$
3. $\overline{z} - \mathrm{i}z$
4. $z - \mathrm{i}\overline{z}$
5. $\overline{z} - \mathrm{i}\overline{z}$
6. $z + \mathrm{i}z$

$$\overline{z + i\overline{z}} = \overline{z} + \overline{i\overline{z}}$$

$$= \overline{z} + \underbrace{\overline{i}}_{= -i}\ \underbrace{\overline{\overline{z}}}_{= z}$$

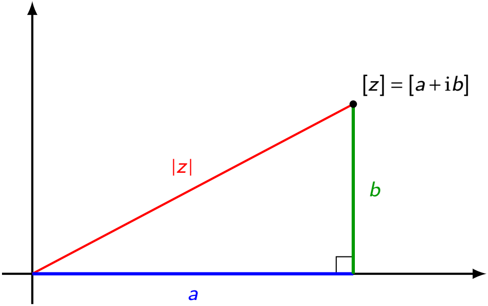
$$= \overline{z} - iz$$

Definition

Soit $z := a + \mathrm{i}b$. On appelle ***module*** de z et on le note $|z|$, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Attention : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \in \mathbb{R}^+$.



Exemple 1

$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

Remarque

Si A et B sont deux points du plan d'affixes z_A et z_B, alors

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Proposition 3.

Soient z et z' deux nombres complexes :

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|zz'| = |z||z'|$
3. $|z| = |\overline{z}|$
4. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
5. si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
6. si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
7. $|Re(z)| \leqslant |z|$
8. $|Im(z)| \leqslant |z|$

Démonstration.

$\square$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)\times(1+i)} \cdot (1+i) = \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}} = i$$

Exercice 3

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. En déduire celle de $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{11}$.

Donc $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} = i^{11}$ mais $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = \underline{1}$

$$= i^4 \cdot i^4 \cdot i^3$$

$$= i^3 = \underline{\underline{-i}}$$

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{1 \times (3+4i)}{|3-4i|^2} = \dots$$

Question 5

Quel est l'inverse de $3-4\mathrm{i}$?

❶ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$

❷ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$

❸ $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$

❹ $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathrm{i}$

❺ $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$

❻ $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$

Très important :

Proposition 4. Inégalité triangulaire - admise

Pour tous complexes z, z', $z' \longleftrightarrow -z'$

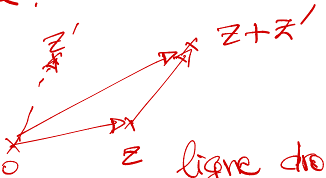
(1) $$||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

(2) $$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Interprétation géométrique :

Avec des mots

« le chemin le + court entre 2 points (de $\mathbb{C}$) est la ligne droite »



À venir

- TD 10 : préparer les nombres complexes z_1 et z_2 de l'exercice 1
- Dates limites DM WIMS :
  - DM5 - Intégrales et primitives - 27 octobre 2019
  - DM6 - Nombres complexes - 10 novembre 2019
  - DM7 - Forme exponentielle et formules trigonométriques - 17 novembre 2019
  - ...