# Programme du groupe de travail "Valeurs zêta multiples en quantification par déformation"

Pour chaque exposé nous indiquons les sujets qui devront être présentés et qui seront éventuellement nécessaires pour les exposés suivants. On laisse aux orateurs la liberté de choisir comment distribuer le temps restant. Les références présentées sont à titre indicatif.

**1 – Autour de l'opérade des petits disques**

- Opérades topologiques et dans les complexes de chaînes/cochaînes.
- L'opérade $E_2(/D_2)$, son modèle $FM_2$ (compactification de Fulton–MacPherson), équivalence entre les deux .
- Description de la cohomologie de $E_2$ via le calcul d'Arnol'd, identification avec l'opérade de Gerstenhaber.

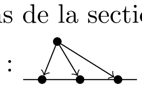
Référence : Pour une introduction, [Fre18, 1.1-1.3 et 1.9], voir [Sin13] sections 2 et 6 pour les détails algébriques ou [LV14, 5.1-5.2] pour $FM_2$.

**2 – Complexes de graphes**

- Définition des complexes de graphes (symétries).
- Stratégie générale de la preuve : $\Omega^\bullet(FM_2) \leftarrow \mathrm{Graphs}^\bullet \rightarrow H^\bullet(FM_2)$.
- Intégrales : Décrire $\mathrm{Graphs}^\bullet \rightarrow H^\bullet(FM_2)$. Compatibilité avec la différentielle (et la structure opéradique).
- Optionnel : Un exemple de calcul, par exemple les graphes roues.

Référence : Section 3(.3) de [Kon99] pour les idées. Comparer avec [LV14, Sections 6-9] où on peut trouver une preuve rigoureuse.

**3 – Swiss Cheese**

- Notion d'opérade colorée.
- L'opérade $SC_2$, le modèle $\mathfrak{C}_{n,m}$, l'équivalence.
- Non-formalité.
- Intégrales : Le morphisme KGraphs $\rightarrow \Omega(\mathfrak{C}_{n,m})$ et les poids de Kontsevich. On pourra se référer aux notations de la section 5.1 de [BPP18].
- Optionnel : Un exemple de calcul : 

Références : La note [Vor99], voir [Kon03, 6.2] pour les poids ou [Wil15] pour le morphisme.

**4 – Valeurs zêta multiples**

– Définition avec des séries, avec des intégrales (itérées).

– Relations de double mélange.

– Régularisations et relations de double mélange régularisé (pour des détails à ce sujet, voir par exemple les sections 1 à 3 de [IKZ06]). Exemples.

– Structure (conjecturale) de l'algèbre des valeurs zêta multiples : conjecture de la dimension de Zagier.

– Énoncé du résultat principal (Théorème 1.2) de [BPP18].

Référence : Sections 1 à 4 de [Dup19] et les références listées. On pourra se baser sur la section 2.1 de [BPP18] pour introduire des notations cohérentes sur les intégrales itérées et préparer l'exposé 7.

**5 et 6 – Associateurs et Grothendieck–Teichmüller (deux exposés)**
La référence originale pour ces deux exposés est l'article fondateur [Dri91]. Une référence très lisible et écrite dans un langage "pré-opéradique" est [BN98]. On pourra aussi lire les notes de cours [Wil14].

– L'opérade en groupoïdes $PaB := \pi_1(FM_2, \mathrm{Magma})$, et sa description par générateurs et relations ([CG19, §2.2], [Fre17, Theorem 6.2.4]).

– Définition de $GT$ comme groupe d'automorphismes de $PaB$, et sa description explicite ([CG19, §2.6], [Fre17, Theorem 11.1.7]).

– Diagrammes de cordes horizontaux et algèbre de Lie de Drinfel'd–Kohno ([BN98, Definition 2.7]), et leur structure d'opérade ([BN98, Definition 2.9], [CG19, §2.3].

– L'opérade $PaCD$ des diagrammes de cordes parenthésés ([CG19, §2.4], [Fre17, Theorem 10.3.4]).

– Définition de $GRT$ comme groupe d'automorphismes de $PaCD$, et sa description explicite ([CG19, §2.7], [Fre17, Theorem 10.3.10]).

– Définition des associateurs comme torseur d'isomorphismes entre $PaB$ et $PaCD$, et description explicite ([CG19, §2.5], [Fre17, Theorem 10.2.9]).

– L'associateur $\Phi_{KZ}$ comme holonomie renormalisée de l'équation de Knizhnik–Zamolodchikov.

Voici quelques faits qu'on peut vouloir mentioner "au passage" :

– Le groupe $G(R)T$ comme automorphismes homotopiques (de $PaB$ et $PaCD$).

– L'associateur $\Phi_{KZ}$ est une série génératrice pour les valeurs zêta multiples.

– Quelques éléments de la preuve que l'associateur $\Phi_{KZ}$ est bien un associateur (équations de Knizhnik–Zamolodchikov supérieures).

– L'associateur d'Alekseev–Torossian.

**7 – Intégrales itérées, polylogarithmes, hyperlogarithmes.** L'idée de cet exposé est d'approfondir les aspects fonctionnels des intégrales itérées sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ ou plus généralement sur $\mathbb{P}^1 \setminus S$ : équations différentielles, monodromie, régularisation. On suivra les résultats des sections 2.1, 2.2, 2.3 de [BPP18].

- Intégrales itérées, le théorème de Chen. Le cas des points-base tangentiels.
- Monodromie.
- Équation différentielle.
- L'exemple des polylogarithmes classiques $\mathrm{Li}_n(z)$.
- Optionnel : aspects géométriques (système local, fibré vectoriel à connexion) ; aspects arithmétiques et algébro-géométriques des polylogarithmes classiques [Zag91, Zag07, Hai94].

Une bonne référence détaillée est [Bro13], sections 2 à 4. La référence [Hai94] est aussi conseillée et contient notamment le calcul de la monodromie des polylogarithmes classiques.

**8 – Le faisceau polylogarithmique** Section 2.4 de [BPP18]. Une différence par rapport à l'exposé précédent est qu'on se place en dimension supérieure, sur $\mathfrak{M}_S$ plutôt que $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

- Les espaces de modules $\mathfrak{M}_S$ et leur géométrie.
- Le faisceau polylogarithmique $\mathcal{V}_S$, sa filtration par le poids.
- Le comportement local (Théorème 2.20).
- Calcul par fibrations : Proposition 2.21.
- Exemples.

**9 et 10 – Variétés de Poisson, star-produits, quantification par déformation des variétés de Poisson, d'après Kontsevich (deux exposés)** Les références principales pour ces deux exposés sont l'article fondateur original [Kon03] de Kontsevich, ainsi que le petit livre de synthèse [CKTB05].

- Structures de Poisson sur une variété $X$. Examples : structures de Poisson linéaires, structures de Poisson constantes, structures symplectiques... [LGPV13]
- Quantification par déformation : inspiration physique, définition, et exemples ($\star$-produit de Moyal–Weyl, quantification des structures de Poisson linéaires,...). Voir [DS02] et sa bibliographie, ou encore [CKTB05, §1.1-1.3].
- Les structures de Poisson comme éléments de Maurer–Cartan dans l'algèbre de Lie différentielle graduée $T_{poly}X$ des champs de poly-vecteurs.
- Les $\star$-produits comme éléments de Maurer–Cartan dans l'algèbre de Lie différentielle graduée $D_{poly}X$ des opérateurs poly-différentiels.
- Énoncé du théorème de formalité de Kontsevich (introduire le concept de morphisme $L_\infty$).

– L'existence de quantification comme conséquence de la formalité de $D_{poly}X$ (cf. par ex. [CKTB05, §9.5]).

– Démonstration de la formalité de $D_{poly}\mathbb{R}^d$, d'après Kontsevich [Kon03, §6] (voir aussi [CKTB05, Ch.6 & Ch.9]).

On peut vouloir mentionner la preuve de Tamarkin du théorème de formalité de Kontsevich, présentée dans [CKTB05, Ch.4].

**11 – Énoncé des résultats principaux** Le but de cet exposé est d'expliquer la stratégie de la preuve et le cas particulier de l'oubli d'un point du bord. On suivre les sections 4.1, 4.2, 4.3 de [BPP18].

– Géométrie des espaces de modules de disques marqués.

– Théorème 4.1 et Corollaire 4.2 de [BPP18].

**12 – Polylogarithmes univalués** La nécessité de travailler avec des polylogarithmes univalués est motivée par le cas de l'oubli d'un point intérieur dans la preuve du théorème principal. On suivra la section 3 de [BPP18].

– Le cas classique : la fonction de Bloch–Wigner (version univaluée du dilogarithme) et les polylogarithmes univalués. Voir par exemple [Hai94].

– Théorème 3.4 de [BPP18].

**13 – L'oubli d'un point intérieur** Le coeur technique de la preuve : la section 4.4 de [BPP18]. On expliquera la preuve dans les grandes lignes avec comme guide l'exemple de la section 5.2.

**14 – Spéculations motiviques** Cet exposé spéculatif pourra faire le lien avec des conjectures reliant valeurs zêta multiples, motifs de Tate mixtes, associateurs, etc.

– Lien entre les valeurs zêta multiples et les motifs de Tate mixtes.

– La conjecture de Deligne–Ihara.

– Le théorème de Brown [Bro12].

– Valeurs zêta multiples et intégrales de Feynman.

– Discussion de certaines conjectures de la section 4 de [Kon99] (par exemple la Conjecture 5).

## Références

[BN98] D. Bar-Natan : On associators and the Grothendieck-Teichmüller group. *Selecta Mathematica New Series*, 4:183–212, 1998.

[BPP18] P. Banks, E. Panzer et B. Pym : Multiple zeta values in deformation quantization. *arXiv preprint 1812.11649*, 2018.

[Bro12] F. Brown : Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$. *Ann. of Math. (2)*, 175(2): 949–976, 2012.

[Bro13] F. Brown : *Iterated integrals in quantum field theory*, page 188–240. Cambridge University Press, 2013.

[CG19] D. Calaque et M. Gonzalez : Twisted elliptic KZB equations. *soon on the arXiv*, 2019.

[CKTB05] A. Cattaneao, B. Keller, C. Torossian et A. Bruguières : *Déformation, quantification, théorie de Lie*, volume 20 de *Panoramas et synthèses*. Société mathématique de France, 2005.

[Dri91] V. Drinfeld : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\bar{Q}/Q)$. *Leningrad Math. J.*, 2:829–860, 1991.

[DS02] G. Dito et D. Sternheimer : Deformation quantization : genesis, developments and metamorphoses. *Deformation Quantization (Strasbourg, 2001), IRMA Lect. Math. Theor. Phys*, 1:9–54, 2002.

[Dup19] C. Dupont : Valeurs zêta multiples. *Preprint*, 2019.

[Fre17] B. Fresse : *Homotopy of Operads and Grothendieck–Teichmüller Groups : Part 1 : The Algebraic Theory and its Topological Background*, volume 217 de *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, 2017.

[Fre18] B. Fresse : Little discs operads, graph complexes and Grothendieck–Teichmüller groups. *arXiv preprint arXiv :1811.12536*, 2018.

[Hai94] R. Hain : Classical polylogarithms. *Motives (Seattle, WA, 1991)*, 55:3–42, 1994.

[IKZ06] K. Ihara, M. Kaneko et D. Zagier : Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compos. Math.*, 142(2):307–338, 2006.

[Kon99] M. Kontsevich : Operads and motives in deformation quantization. *Letters in Mathematical Physics*, 48(1):35–72, 1999.

[Kon03] M. Kontsevich : Deformation quantization of Poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66(3):157–216, 2003.

[LGPV13] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau et P. Vanhaecke : *Poisson Structures*, volume 347 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2013.

[LV14] P. Lambrechts et I. Volić : *Formality of the little $N$-disks operad*, volume 230. American Mathematical Society, 2014.

[Sin13] D. P. Sinha : The (non-equivariant) homology of the little disks operad. *In OPERADS 2009*, volume 26 de *Sémin. Congr.*, pages 253–279. Soc. Math. France, Paris, 2013.

[Vor99] A. A. Voronov : The Swiss-cheese operad. *In Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)*, volume 239 de *Contemp. Math.*, pages 365–373. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Wil14] T. Willwacher : The Grothendieck-Teichmüller group. *Course notes available at https://people.math.ethz.ch/~wilthoma/docs/grt.pdf*, 2014.

[Wil15] T. Willwacher : Models for the $n$-Swiss Cheese operads. *arXiv preprint arXiv :1506.07021*, 2015.

[Zag91] D. Zagier : Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic $K$-theory of fields. *In Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*, volume 89 de *Progr. Math.*, pages 391–430. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[Zag07] D. Zagier : The dilogarithm function. *In Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, pages 3–65. Springer, 2007.