Stabilité homologique générique

- $\Bbbk$ anneau commutative
- $(g, d, (p))$

genre — dim homologique — poids F_*

- R E_2-algèbre dans $sMod_{\Bbbk}^{\mathbb{N}}$ augmentée tel que:

genre

$$H_{*,0}(R) = k[\sigma] \quad \text{avec} \quad |\sigma| = (1,0)$$

$$\rightsquigarrow H_{g,d}(R) \xrightarrow{\sigma \cdot -} H_{g+1,d}(R)$$

- <u>Stabilité homologique</u>:

$\sigma \cdot : H_{g,d} \longrightarrow H_{g+1,d}$ isomorphisme pour

$d < ? \cdot g$

Ou bien : $H_{g,d}\left(B/\sigma B \right) = 0$ pour $d < ? g$

Theorem : Soit $B \in Alg_{E_2}(sMod_{\Bbbk}^{\mathbb{N}})$ augmentée

tq

- $H_{*,0}(B) = \Bbbk[\sigma]$
- $H^{E_2}_{g,d}(B) = 0 \quad \forall d < g-1$ $\left(\Leftarrow H^{E_1}_{g,d}(B) = 0 \right.$ $\left. \forall d < g-1 \right)$

Alors :

a) $H_{g,d}(B/\sigma B) = 0 \quad \forall d < g/2$

b) Si $H_{1,1}(B) \xrightarrow{\sigma \cdot} H_{2,1}(B)$ surjective alors

$\Updownarrow$

$H_{2,1}(B/\sigma B) = 0$

$H_{g,d}(B/\sigma B) = 0 \quad \forall d < \frac{2}{3} g$

Observation : Si $\exists\, F_* B \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_2}(s\mathrm{FiltMod}_{\mathbb{k}}^{\mathbb{N}})$

tel que $gr_*(B)$ satisfait le théorème, alors

B aussi.

a) Reductions

1) Approximation CW de B.

• Sans cellules en (g,d) avec $d<g-1$, sauf

σ en $(1,0)$

2) $F_* B$ filtration par squelettes, alors

$gr_*(B) = \mathbb{E}_2(\sigma, x_{g,d}^{\alpha})$ $\mathbb{E}_2$-algèbre libre,

$|x_{g,d}^{\alpha}| = (g,d)$ avec $d \geq g-1$

$\rightsquigarrow$ suffit de vérifier A pour B libre

$\mathbb{k} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{F}_\ell$

<u>Rappel</u> : opération sur $H_{*,*}(R)$ (R $\mathbb{E}_2$-algèbre)

$$\bullet : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2,\, d_1+d_2}$$

$$[-,-] : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2,\, d_1+d_2+1}$$

$$Q_e^s : H_{g,d} \longrightarrow H_{eg,\, d+2s(e-1)}$$

$2s = \begin{cases} d \\ d+1 \end{cases}$

$$\beta Q_e^s : H_{g,d} \longrightarrow H_{eg,\, d+2s(e-1)-1}$$

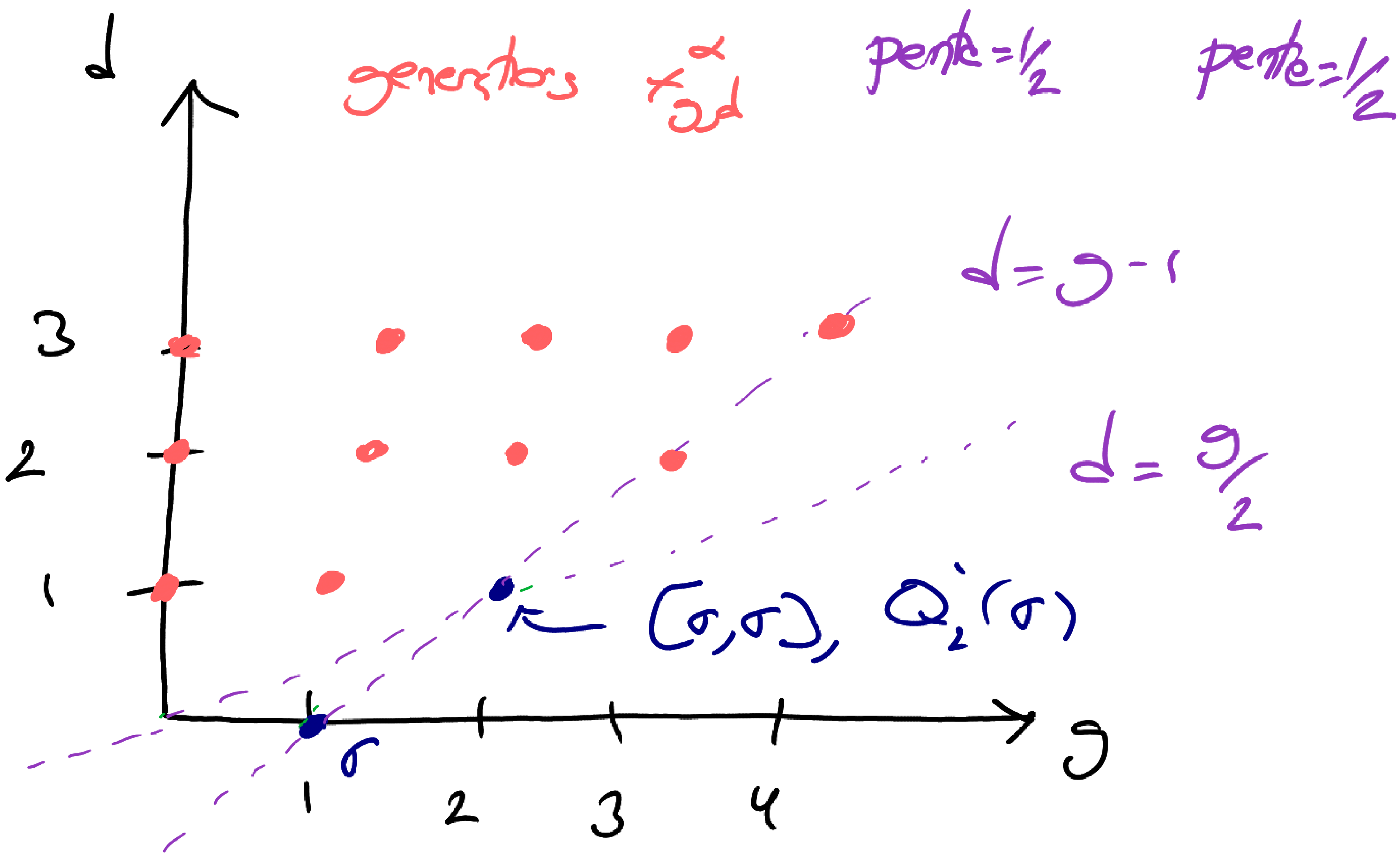
$$H_{*,*}(\mathbb{E}_2(\sigma, x_{g,d}^{\alpha})) = \underbrace{\mathrm{Sym}\Big(\beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1} \cdots \beta^{\varepsilon_r} Q^{s_r} \left(\begin{array}{c}\text{mot de Lie décalé} \\ \text{dans } \sigma, x_{g,d}^{\alpha}\end{array}\right)\Big)}_{L(\sigma,\, x_{g,d}^{\alpha})}$$

$\varepsilon_1, \dots \varepsilon_r = 0, 1$

<u>Notons</u> : $\text{pente}(x_{g,d}^{\alpha}) = d/g > 1/2$.

- Q_e^s, βQ_e^s, $[\sigma, -]$, $[x_{g,d}^{\alpha}, -]$, augmentent la pente.

- Les seuls éléments de $L(\sigma, x_{g,d}^{\alpha})$ de pente $\leq 1/2$ sont σ, $[\sigma,\sigma]$, $Q_2^1(\sigma)$



Alors $H_{*,*}(R/\sigma R) = \mathrm{Sym}(L(\sigma, x_{g,d}^{\alpha}) \setminus \{\sigma\})$

Tous les éléments de $L(\sigma, x_{g,d}^{\alpha}) \setminus \{\sigma\}$

Sont de pente $\geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ idem pour $H_{*,*}(\mathcal{B}/\sigma\mathcal{B})$

b) Si $H_{1,1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sigma\cdot} H_{2,1}(\mathcal{B})$ surjective (*)

$H_{g,d}(\mathcal{B}/\sigma\mathcal{B}) = 0$, $\forall d < \frac{2}{3} g$

<u>Réductions</u>: (1) (*) $\Rightarrow H^{E_2}(\mathcal{B}) = 0$

(pas de indécomposables en degree (2,1))

$\to$ $\mathcal{B}$ modele CW comme avant, sans cellules en degré (2,1)

(2) Élément canonique dans $H_{2,1}$:

$E_2(\sigma) \longrightarrow \mathcal{B}$

$$H_{2,1}(E_2(\sigma)) \longrightarrow H_{2,1}(\mathcal{B})$$

$$\begin{array}{lcl} \rotatebox{90}{$\cong$} & & \\ H_1(\mathrm{Conf}_2(D^2)) & & Q_{\mathbb{Z}}^1(\sigma) \text{ "} \tfrac{1}{2}[\sigma,\sigma] \text{"} \\ \rotatebox{90}{$\cong$} & & \\ H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z} & 1 \longmapsto & Q_{\mathbb{Z}}^1(\sigma) \end{array}$$

$2\,Q_{\mathbb{Z}}^1(\sigma) = [\sigma,\sigma]$

Par hypothèse : $\exists\, x \in H_{1,1}(B)$ tel que $\sigma x = Q_2'(\sigma)$

<u>Idée</u> : prendre modèle CW de B avec cellules $\rho_{1,1}$ qui réalise x

$\rho_{2,2}$ tel que $\partial(\rho_{2,2}) = \sigma \cdot \rho_{1,1} - Q_2'(\sigma)$

$x_{g,d}^{\alpha}$ en plus avec $d \geqslant g-1$ et $(g,d) \neq (2,1)$

(3) $F_* B$ tel que :

- $\sigma, \rho_{1,1}, \rho_{2,2}$ poids -1
- $x_{g,d}^{\alpha}$ poids d

$$gr_*(B) = \Big(E_2(\sigma, \rho_{1,1}) \cup E_2(\underset{\sigma\rho_{1,1} - Q_2'(\sigma)}{\rho_{2,2}})\Big) \vee$$

$$\vee\, E_2(x_{g,d}^{\alpha})$$

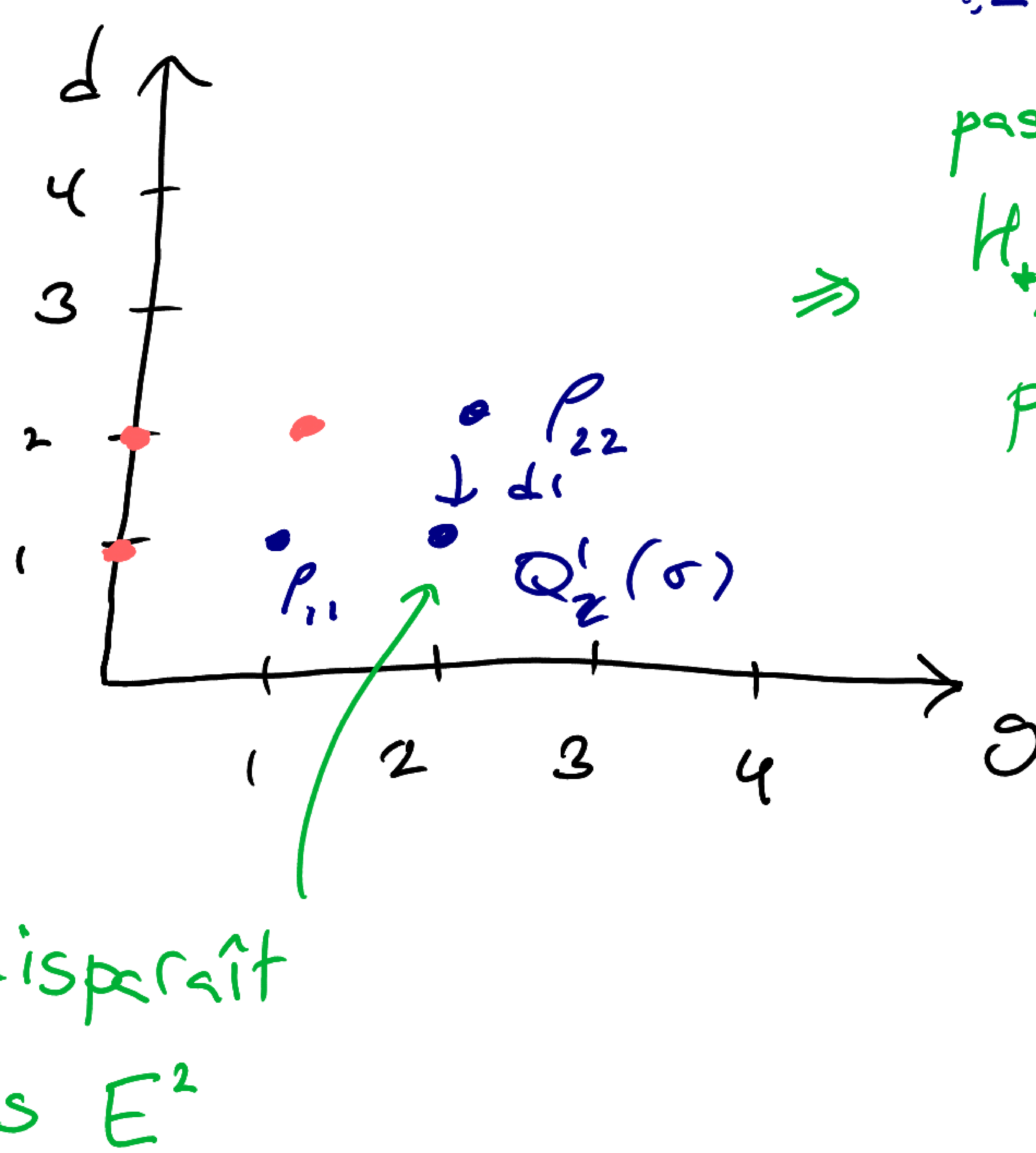
Suffit de vérifier b) pour cette algèbre presque libre

(4) $F_*\left(\mathbb{E}_2(\sigma, \rho_{1,1}) \underset{\sigma\rho_{11} - Q_2'(\sigma)}{\cup} \mathbb{E}_2(\rho_{2,2})\right) \vee$

$\vee\ \mathbb{E}_2(x^\alpha_{g,d})$ avec poids $\sigma, \rho_{1,1}, x^\alpha_{g,d} = 0$

poids $\rho_{2,2} = 1$

$E^1/_{\sigma\mathcal{R}}$



$\Rightarrow$ pas de homologie $H_{*,*}(\mathcal{B}/\sigma\mathcal{B})$ de pente $< 2/3$