Stabilité homologique générique

Joost Nuiten

- k anneau comm.
- $(\underset{\text{genre}}{g}, \underset{\text{dim. homologique}}{d}, \underset{\text{poids } F_*}{(p)})$
- R $\mathbb{E}_2$-algèbre dans $s\mathrm{Mod}_k^{\mathbb{N}}$ augmentée

  tq $H_{*,0}(R) = k[\sigma]$, avec $|\sigma| = (1,0)$

$$\rightsquigarrow \quad H_{g,d}(R) \xrightarrow{\sigma\cdot -} H_{g+1,d}(R)$$

Stabilité homologique :

$$\sigma\cdot - : H_{g,d}(R) \to H_{g+1,d}(R) \text{ iso pour } d < \underset{\text{pente}}{\boxed{?}}\cdot g$$

ou bien $\quad H_{g,d}(R/\sigma.R) = 0$ pour $d < \boxed{?}\cdot g$.

Thm: Soit $R \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_2}(s\mathrm{Mod}_k^{\mathbb{N}})$ augmentée tq

- $H_{*,0}(R) = k[\sigma]$
- $H^{\mathbb{E}_2}_{g,d}(R) = 0 \quad \forall d < g-1 \quad (\Leftarrow H^{\mathbb{E}_1}_{g,d}(R) = 0 \ \forall d < g-1)$.

Alors :

Ⓐ $H_{g,d}(R/\sigma R) = 0 \quad \forall d < \frac{1}{2} g$.

Ⓑ Si $H_{1,1}(R) \xrightarrow{\sigma\cdot -} H_{2,1}(R)$ surjective, $(\Leftrightarrow H_{2,1}(R/\sigma R) = 0)$

alors $H_{g,d}(R/\sigma.R) = 0 \quad \forall d < \frac{2}{3} g$.

Observation :

S'$\exists$ $F_* R \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_2}(s\mathrm{FiltMod}_k^{\mathbb{N}})$ tq $gr_* R$ satisfait le thm, alors R aussi.

Ⓐ Réductions

(1) Approximation CW de R sans cellules en (g,d) avec $d < g-1$, sauf σ en $(1,0)$.

(2) $F_* R$ filtration par squelettes

$$gr_*(R) = \mathbb{E}_2(\sigma, X^{\alpha}_{g,n}) \quad \mathbb{E}_2\text{-algèbre libre},$$

$|X^{\alpha}_{g,n}| = (g,d)$ avec $d \geq g-1$.

$\rightsquigarrow$ suffit de vérifier Ⓐ pour $\boxed{R \text{ libre}}$

$\rightsquigarrow$ on peut supposer $k = \mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ on peut supposer $\boxed{k = \mathbb{Q} \text{ ou } k = \mathbb{F}_\ell}$.

Rappel : opération sur $H_{*,*}(R)$ $\quad (R\ \mathbb{E}_2)$

$$\bullet : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2,\, d_1+d_2}$$

$$[-,-] : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2,\, d_1+d_2+1}$$

$$Q_\ell^s : H_{g,d} \longrightarrow H_{\ell g,\, d+2s(\ell-1)}, \quad 2s = \begin{cases} d \\ d+1 \end{cases}$$

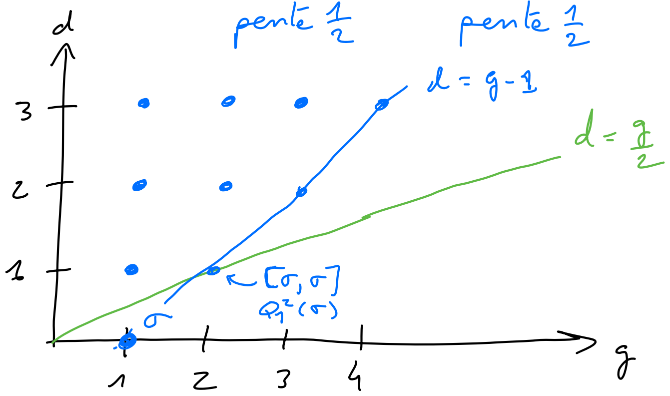
$$\beta Q_\ell^s : H_{g,d} \longrightarrow H_{\ell g,\, d+2s(\ell-1)-1}$$

$$H_{*,*}(\mathbb{E}_2(\sigma, X^{\alpha}_{g,d})) = \mathrm{Sym}\Big(\underbrace{\beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1} \cdots \beta^{\varepsilon_r} Q^{s_r} \left(\begin{matrix} \text{mot de Lie} \\ \text{décalé en} \\ \sigma, X^{\alpha}_{g,d} \end{matrix} \right)}_{L(\sigma,\, X^{\alpha}_{g,d})} \Big)$$

$(\varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1)$

Notons :

- $\text{pente}(X_{g,d}^{\alpha}) = \frac{d}{g} > \frac{1}{2}$
- Q^s, βQ_e^s, $[\sigma, -]$, $[X_{g,d}^{\alpha}, -]$ augmente la pente
- Les seuls éléments de $L(\sigma, X_{g,d}^{\alpha})$ de pente $\leq \frac{1}{2}$ sont : σ, $\underbrace{[\sigma,\sigma]}_{\text{pente } \frac{1}{2}}$, $\underbrace{Q_2^1(\sigma)}_{\text{pente } \frac{1}{2}}$.



Alors $H_{*,*}(R/\sigma . R) = \text{Sym}\left(L(\sigma, X_{g,d}^{\alpha}) \setminus \{\sigma\}\right)$

Tous les éléments de $L(\sigma, X_{g,d}^{\alpha}) \setminus \{\sigma\}$ sont de pente $\geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ idem pour $H_{*,*}(R/\sigma R)$.

Ⓑ Si $H_{1,1}(R) \xrightarrow{\sigma} H_{2,1}(R)$ surjective ⊛
alors $H_{g,d}(R/\sigma R) = 0$ $\forall\, d < \frac{2}{3} g$.

Réductions :

(1) ⊛ $\Rightarrow$ $H_{2,1}^{\mathbb{E}_2}(R) = 0$ (pas d'indécomposables en degré $(2,1)$)

$\rightsquigarrow$ R modèle CW comme avant, sans cellule en degré $(2,1)$

(2) Élément canonique dans $H_{2,1}$:

$$\mathbb{E}_2(\sigma) \longrightarrow R.$$

$$\begin{tikzcd}
H_{2,1}(\mathbb{E}_2(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H_{2,1}(R) \\
H_1(\mathrm{Conf}_2(D^2)) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & Q^1_2(\sigma) \\
H_1(\mathbb{RP}^1) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
k \ni 1 \arrow[ruu, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$([\sigma,\sigma] = 2Q^1_2(\sigma))$

Par hypothèse : $\exists X \in H_{1,1}(R)$ tq $\sigma . X = Q^1_2(\sigma)$

Idée : • prendre un modèle CW de R avec les cellules :

× $e_{1,1}$ qui réalise X.

× $e_{2,2}$ tq $\partial(e_{2,2}) = \sigma \cdot e_{1,1} - Q^1_2(\sigma)$

× $X^\alpha_{g,d}$ en plus avec $d \geq g-1$ et $(g,d) \neq (2,1)$.

(3) $F_* R$ tq

- σ, e_{11}, e_{22} en poids -1
- $X^\alpha_{g,d}$ en poids d

$$gr_*(R) = \left(\mathbb{E}_2(\sigma, e_{11}) \cup_{\sigma . e_{11} - Q^1_2(\sigma)} \mathbb{E}_2(e_{22})\right) \vee \mathbb{E}_2(X^\alpha_{g,d}).$$

Il suffit de vérifier Ⓑ pour cette algèbre presque libre.

(4) $F_*\left(\left(\mathbb{E}_2(\sigma, e_{11}) \cup_{\sigma . e_{11} - Q^1_2(\sigma)} \mathbb{E}_2(e_{22})\right) \vee \mathbb{E}_2(X^\alpha_{g,d})\right)$

avec poids de $\sigma, e_{11}, X^\alpha_{g,d} = 0$

poids de $e_{22} = 1$