Université Paul Sabatier

Calcul Différentiel

résumé de cours

Jean-Pierre RAYMOND

Ce texte est un résumé du cours de Calcul Différentiel-Équations différentielles (LIM2) de la Licence de Mathématiques, option Ingénierie Mathématique (24 h de cours).

Chapitre 1

Applications Différentiables

1.1 Introduction

Un des objectifs du Calcul Différentiel est l'étude locale des applications. Il fournit aussi des outils pour l'étude des problèmes d'optimisation, des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles. Donnons quelques exemples élémentaires dans lesquels intervient le Calcul Différentiel.

Exemple 1.1.1 *Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Calculer l'équation du plan tangent au graphe de f au point* $(1,1,5)$.

Exemple 1.1.2 *Considérons la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par $(cos^3 t, sin^3 t, cos\, 2t)_{t\in\mathbb{R}}$. Calculer l'équation de la tangente, et du plan normal en un point de la courbe.*

Exemple 1.1.3 *Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-3x-4y-z$. Soit $C = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Montrer que le problème d'optimisation $inf\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in C\}$ admet une solution unique, et la calculer.*

Exemple 1.1.4 *Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{-2x}[5x^2-4xy+y^2-2x+1]$. Déterminer les points stationnaires de f, ainsi que leur nature (minimum local, maximum local, point selle).*

1.2 Différentes notions de dérivées

Dans cette section X et Y désignent des espaces vectoriels réels normés, f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O} \subset X$ à valeurs dans Y.

Définition 1.2.1 *Dérivée en un point suivant une direction. Soient $a \in \mathcal{O}$, $d \in X$. La limite*

$$lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a+\lambda d) - f(a)}{\lambda}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f au point a suivant la direction d. Elle est notée $f'(a;d)$.

Remarque. Soit ϕ la fonction définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ par $\phi(t) = f(a + td)$. D'après la définition précédente, f admet une dérivée au point a dans la direction d si, et seulement si, ϕ est dérivable en zéro. De plus, $\phi'(0) = f'(a; d)$. (cf section 1.4 pour la notion de dérivée d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un e.v.n.).

Définition 1.2.2 *Dérivée de Gâteaux. Soit $a \in \mathcal{O}$. Supposons que $f'(a; d)$ existe pour tout $d \in X$. S'il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que $Ld = f'(a; d)$ pour tout $d \in X$, alors l'opérateur L est appelé Gâteaux-différentielle (ou G-différentielle) de f au point a. Il est souvent noté $f'(a)$, et f est dite Gâteaux-différentiable (ou différentiable au sens de Gâteaux) au point a.*

Remarque. L'application f est G-différentiable en a si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que

$$f(a + \lambda d) = f(a) + \lambda Ld + |\lambda|\varepsilon(\lambda), \quad \text{avec } \lim_{|\lambda|\to 0}\varepsilon(\lambda) = 0,$$

où ε est une application de $\mathbb{R}$ dans Y dépendant de d.

Remarque. L'application f peut être G-différentiable en a sans être continue en ce point. Par exemple, l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = 1$ si $x_2 > 0$ et si $x_1 = x_2^2$, et $f(x_1, x_2) = 0$ sinon, est G-différentiable en $(0, 0)$ sans être continue en ce point.

Définition 1.2.3 *Dérivée de Fréchet. Soit $a \in \mathcal{O}$. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ et une application ε de X dans Y, tels que*

$$f(a + d) = f(a) + Ld + \|d\|\varepsilon(d), \quad \text{avec } \lim_{\|d\|\to 0}\varepsilon(d) = 0.$$

L'opérateur L est appelé différentielle de Fréchet (ou F-différentielle, ou Fréchet-différentielle) de f au point a, et f est dite Fréchet-différentiable (ou différentiable, ou différentiable au sens de Fréchet) au point a. La différentielle de f au point a est souvent notée $Df(a)$, la notation $f'(a)$ est aussi utilisée.

Remarque. Si l'application f est F-différentiable en a alors l'opérateur L intervenant dans la définition précédente est unique (raisonner par l'absurde pour le vérifier). Par conséquent, l'application ε est aussi unique.

Remarque. Si l'application f est F-différentiable en a alors elle est continue en ce point.

Remarque. (*Définition équivalente de la F-différentiabilité*) L'application f est F-différentiable en a si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que

$$\lim_{\|d\|_X\to 0}\frac{\|f(a + d) - f(a) - Ld\|_Y}{\|d\|_X} = 0.$$

Proposition 1.2.1 *Si f est Fréchet-différentiable au point a, alors elle est Gâteaux-différentiable en ce point, et la F-différentielle et la G-différentielle coïncident. La réciproque est fausse.*

On peut démontrer que, si l'application f est G-différentiable dans un voisinage V_a de $a \in \mathcal{O}$, et si l'application de V_a dans $\mathcal{L}(X, Y)$ définie par $x \to f'(x)$ est continue de $(V_a, \|\cdot\|_X)$ dans $(\mathcal{L}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X;Y)})$, alors f est F-différentiable dans V_a.

Contre-exemple. L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \frac{x_2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}{(x_1^2+x_2^2)^2+x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$, est G-différentiable en $(0, 0)$ mais n'est pas F-différentiable en ce point.

Avertissement. En l'absence de précision, 'f est une application différentiable' est utilisé pour 'f est une application F-différentiable'.

1.3 Opérations sur les applications différentiables

Théorème 1.3.1 *(Différentielle d'une combinaison linéaire) Soient X, Y des espaces vectoriels normés. Soient U un ouvert de X, f et g deux applications de U dans Y, soient $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Si f et g sont F-différentiables (respectivement G-différentiables) en a, alors $\lambda f + g$ est F-différentiable (respectivement G-différentiable) en a, et $D(\lambda f + g)(a) = \lambda Df(a) + Dg(a)$.

Théorème 1.3.2 *(Différentielle d'une application à valeurs dans un produit) Soient X, et Y_i, pour $i = 1, ..., n$, des espaces vectoriels normés. Soit $U \subset X$ un ouvert de X, et soit $f = (f_1, ..., f_n)$ une application de U dans $Y = Y_1 \times ... \times Y_n$ (pour $i = 1, ..., n$, f_i est une application de U dans Y_i).*

L'application f est F-différentiable (respectivement G-différentiable) en $a \in U$ si, et seulement si, pour $i = 1, ..., n$, les applications f_i sont F-différentiables (respectivement G-différentiables) en a. De plus, $Df(a) = (Df_1(a), ..., Df_n(a))$.

Théorème 1.3.3 *(Différentielle de la composée de deux applications F-différentiables) Soient X, Y, Z des espaces vectoriels normés. Soient $U \subset X$ un ouvert de X, et $V \subset Y$ un ouvert de Y. Soient f une application de U dans V, et g une application de V dans Z.*

Si f est F-différentiable en $a \in U$, et si g est F-différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est F-différentiable en a, et $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

Preuve. L'application f étant différentiable en $a \in U$, il existe une application ε_1 définie sur $U - a$ à valeurs dans Y telle que

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon_1(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0.$$

De même, il existe une application ε_2 définie sur $V - b$ à valeurs dans Z telle que

$$g(y) = g(b) + Dg(b)(y-b) + \|y-b\|\varepsilon_2(y-b) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0}\varepsilon_2(y) = 0.$$

Pour tout $x \in U$, on a donc

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + Dg(b)[Df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon_1(x-a)] \\ &\quad + \|Df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon_1(x-a)\|\varepsilon_2(f(x)-b) \\ &= (Dg(b) \circ Df(a))(x-a) + \|x-a\|\varepsilon(x-a) \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon(x-a) = Dg(b)\varepsilon_1(x-a) + \|Df(a)\frac{(x-a)}{\|x-a\|} + \varepsilon_1(x-a)\|\varepsilon_2(f(x)-b).$$

On vérifie aisément que $\lim_{\|x\|_X\to 0}\|\varepsilon(x)\|_Z = 0$.

Théorème 1.3.4 *(Différentielle de la composée d'une application G-différentiable par une application F-différentiable) Soient X, Y, Z des espaces vectoriels normés. Soient $U \subset X$ un ouvert de X, et $V \subset Y$ un ouvert de Y. Soient f une application de U dans V, et g une application de V dans Z.*

Si f est G-différentiable en $a \in U$, et si g est F-différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est G-différentiable en a, et $D(g \circ f)(a)d = Dg(f(a))[Df(a)d]$ pour tout $d \in X$.

1.4 Applications de $\mathbb{R}$ dans Y

Définition 1.4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une application de I dans un espace vectoriel normé Y, et soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La limite*

$$lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f au point t_0, elle est notée $f'(t_0)$ (on dit alors que f est dérivable en t_0).

Théorème 1.4.1 *Soit f une application de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application f est dérivable en t_0 si, et seulement si, f est différentiable en t_0. De plus, $Df(t_0)d = f'(t_0)d$ pour tout $d \in \mathbb{R}$.*
(Ici $f'(t_0)$ désigne la dérivée de f au point t_0, et $Df(t_0)$ est l'opérateur de multiplication par $f'(t_0)$.)

1.5 Applications partielles

Dans cette section Y et X_i, pour $i = 1, ..., n$, désignent des espaces vectoriels réels normés, X est l'espace produit $X_1 \times ... \times X_n$. De plus f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O} \subset X$ dans Y.

Définition 1.5.1 *Soit $a \in \mathcal{O}$ ($a = (a_1, ..., a_n)$), l'application de X_k dans Y définie par*

$$x_k \to f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n)$$

est appelée k-ième application partielle de f au point a, elle est notée $f_{a,k}$.

Définition 1.5.2 *(Les notations sont celles de la définition précédente) Lorsque $f_{a,k}$ est différentiable en a_k, sa différentielle est appelée différentielle partielle de f en a par rapport à la k-ième variable. Elle est notée $D_k f(a)$, ou $\partial_k f(a)$, ou $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.*

Théorème 1.5.1 *Si f est différentiable en a, alors les différentielles partielles de f en a existent, et pour tout $d = (d_1, ..., d_n)$, on a*

$$Df(a)d = \Sigma_{k=1}^n \partial_k f(a) d_k.$$

Remarque. L'existence des dérivées partielles en a n'est pas suffisante pour que f soit différentiable en a. On démontrera au chapitre 2 que si, pour tout $k = 1, \ldots, n$, les applications $x \to \partial_k f(x) \in \mathcal{L}(X_k; Y)$ sont continues au point a, alors f est différentiable au point a.

Preuve. Soit $d_k \in X_k$. Posons $\hat{d}_k = (0, \ldots, 0, d_k, 0, \ldots, 0)$. L'application f étant différentiable en a, on a

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

En posant $\varepsilon_k(d_k) = \varepsilon(\hat{d}_k)$, et $L_k d_k = Df(a)\hat{d}_k$ on a :

$$f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + d_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = f(a) + L_k d_k + \|d_k\|\varepsilon_k(d_k) \quad \text{avec} \quad \lim_{d_k \to 0} \varepsilon_k(d_k) = 0.$$

Le théorème est donc démontré.

1.6 Cas des applications de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Considérons tout d'abord le cas d'une application f d'un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème 1.5.1, si f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$, alors les différentielles partielles de f en a existent, et pour tout $d = (d_1, ..., d_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $Df(a)d = \Sigma_{k=1}^n \partial_k f(a) d_k$. Dans ce cas, les différentielles partielles $\partial_k f(a)$ sont plus communément appelées dérivées partielles (la différentielle partielle est ici une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et il est usuel d'identifier cette application linéaire avec le nombre réel qui la définit). La notation $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est souvent utilisée.

Le vecteur

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

est appelé gradient de f en a, il est noté $\nabla f(a)$, ou encore $\mathrm{grad} f(a)$.

Étudions maintenant le cas d'une application f d'un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Nous avons donc

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}.$$

Les applications f_i sont appelées applications composantes de f. Ce sont des applications de $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème 1.3.2, f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$ si, et seulement si, les applications composantes f_i sont différentiables en a et on a

$$Df(a) = \begin{pmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_p(a) \end{pmatrix}.$$

Si $d = (d_1, ..., d_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on a $Df_i(a)d = \Sigma_{j=1}^n \partial_j f_i(a) d_j$. La matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \partial_2 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}$$

est donc la matrice de l'application linéaire $Df(a)$ lorsque $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leur base canonique respective. Cette matrice est appelée matrice jacobienne de f en a, elle est notée $Jf(a)$. Son déterminant est appelé Jacobien de f en a.

Proposition 1.6.1 *Soient f une application d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et g une application d'un ouvert $\Omega \subset f(\mathcal{O})$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.*

Si f est différentiable en $a \in \mathcal{O}$, et si g est différentiable en $b = f(a) \in \Omega$, alors l'application $h = g \circ f$ est différentiable en a et $Jh(a) = Jg(b)Jf(a)$, ce qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} \partial_1 h_1(a) & \dots & \partial_n h_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 h_m(a) & \dots & \partial_n h_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(b) & \dots & \partial_p g_1(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_m(b) & \dots & \partial_p g_m(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\partial_j h_i(a) = \Sigma_{k=1}^p \partial_k g_i(b) \partial_j f_k(a), \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n.$$

1.7 Quelques différentielles classiques

Différentielle d'une application linéaire continue
Soit A une application linéaire continue d'un e.v.n. X dans un e.v.n. Y. L'application A est différentiable en tout point $x \in X$ et sa différentielle est égale à A :

$$DA(x) = A \text{ pour tout } x \in X.$$

Différentielle d'une application bilinéaire continue
Soient X_1, X_2 et Y des espaces vectoriels normés. Soit φ une application bilinéaire continue de $X_1 \times X_2$ dans Y. L'application φ est différentiable en tout point (x_1, x_2) de $X_1 \times X_2$ et :

$$D\varphi(x_1, x_2)(h, k) = \varphi(x_1, h) + \varphi(x_2, k) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \text{ et tout } (h, k) \in X_1 \times X_2.$$

Différentielle d'une application multilinéaire continue
Soient $X_1, \ldots, X_n$ et Y des espaces vectoriels normés. Soit φ une application multilinéaire continue de $X_1 \times \ldots \times X_n$ dans Y. L'application φ est différentiable en tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $X_1 \times \ldots \times X_n$ et :

$$D\varphi(x_1, \ldots, x_n)h = \Sigma_{i=1}^n \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ et tout $(h_1, \ldots, h_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

1.8 Exercices

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles de f en (x, y). Sont-elles continues ? L'application f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Reprendre les questions de l'exercice 1 avec la fonction g définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

(α est un exposant positif.)

Exercice 3. Soient A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est noté $(\cdot, \cdot)_{R^n}$. Calculer la différentielle en $x = 0$ de l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto \exp[(Ax, x)_{R^n} + (b, x)_{R^n} + c].$$

Exercice 4. Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$t \mapsto f(a + \cos(t)d),$$

où $a \in \mathbb{R}^3$ et $d \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(2+h, 2+k) = 1 + h + k + hk \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}, \text{ tout } k \in \mathbb{R}.$$

Quelle est la différentielle de f en $(2,2)$?

Exercice 6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (xy, x+y).$$

Sans calculer $f(1,1)$ et $f(-1,-1)$ quelle majoration de $\|f(1,1) - f(-1,-1)\|$ peut-on déduire du théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle ?

Exercice 7. Calculer $\nabla f(a)$ pour les expressions suivantes de la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

a)
$$f(x) = \langle c, x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \gamma \qquad (c \in \mathbb{R}^n \ , \ \gamma \in \mathbb{R})$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle d, x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \delta \qquad (A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ , \ d \in \mathbb{R}^n \ , \ \delta \in \mathbb{R})$$

c)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} [r_i(x)]^2 \qquad (r_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{différentiables })$$

Exercice 8. Soit $B : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ une application bilinéaire continue. X_1 , X_2 et Y étant des espaces normés on sait que la continuité de B se traduit par l'existence d'une constante positive M telle que :

$$\|B(x_1, x_2)\|_Y \leq M \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \qquad \forall x_1 \in X_1 \ \ , \ \forall x_2 \in X_2$$

Montrer que B est différentiable en tout point (a_1, a_2) de $X_1 \times X_2$ et que :

$$DB(a_1, a_2).(d_1, d_2) = B(a_1, d_2) + B(d_1, a_2) \ .$$

Peut-on généraliser cette formule au cas d'une application multilinéaire ?

Exercice 9. L'ensemble $\mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices carrées d'ordre n est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\ll A, B \gg = Trace(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Montrer que que la norme associée : $\|A\| = \ll A, A \gg^{\frac{1}{2}}$ satisfait à l'inégalité : $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ et calculer $Df(A).H$ pour les fonctions f suivantes :

a) $\quad f(A) = \text{Trace}(A),$

b) $\quad f(A) = \text{Trace}(ABA^T) \qquad (B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$

c) $\quad f(A) = \text{Det}(A),$

d) $f(A) \;=\; A^{-1}.$

Exercice 10. Calculer les dérivées partielles de la fonction :

$$f(x,y) = \int_{a(x)}^{b(y)} g(x,y,t)dt,$$

où a et b sont des fonctions différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, g est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. On munit $C([a,b])$, l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, de sa norme usuelle. Montrer que l'application Φ de $C([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

est différentiable.

Chapitre 2

Accroissements finis et formules de Taylor

2.1 Théorème des accroissements finis

Rappelons le résultat suivant connu sous le nom de théorème de la moyenne.

Proposition 2.1.1 *Soit f une application d'un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I, et dérivable dans $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$.*

Soit f une application d'un ouvert $U \subset X$ (où X est un espace vectoriel normé) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in U$, tout $b \in U$, posons $[a, b] = \{x \in X \mid x = a + t(b - a),\ 0 \leq t \leq 1\}$. Supposons que $[a, b] \subset U$. Soit ϕ l'application définie par $\phi(t) = f(a + t(b - a))$. Si f est continue sur $[a, b]$, et si f admet une dérivée en tout point de $]a, b[$ dans la direction $b - a$, alors le théorème de la moyenne est applicable à la fonction ϕ, et on a $f(a) - f(b) = f'(c; b - a)$, où c est un point du segment $]a, b[$.

Ce résultat ne peut pas être étendu au cas des applications à valeurs vectorielles. Considérons par exemple l'application f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Elle est telle que $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, mais $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Théorème 2.1.1 *(Théorème des accroissements finis pour une application définie sur un intervalle réel) Soit Y un espace vectoriel normé, et soit f une application d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans Y. Soient $a \in I$ et $b \in I$ avec $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, alors*

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq sup_{c \in]a,b[} \|f'(c)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)}(b - a).$$

Preuve. On va montrer que $\|f(b) - f(a)\|_Y \leq (M + \varepsilon)(b - a)$ pour tout $\varepsilon > 0$, avec $M = \sup_{c \in]a,b[} \|f'(c)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)}$. Si $M = \infty$ la preuve est finie. Supposons que $M < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On note

$$I = \{c \in [a, b] \mid \forall x \in [a, c],\ \|f(x) - f(a)\| \leq (M + \varepsilon)(x - a)\}.$$

On remarque que $I \neq \emptyset$ car $a \in I$. De plus I est fermé dans $\mathbb{R}$ (vérification facile). Soit $s = \max I$. Si $s = b$ la preuve est finie. Supposons que $s < b$. On a $f'(s) = \lim_{x \to s} \frac{f(x) - f(s)}{x - s}$. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]s, s + \eta] \cap [a, b]$, on ait :

$$\|f(x) - f(s)\|_Y \leq (x - s)(\|f'(s)\| + \varepsilon) \leq (M + \varepsilon)(x - s).$$

Pour tout $0 < \xi \leq \eta$, on a :

$$\|f(s+\xi) - f(a)\|_Y \leq \|f(s+\xi) - f(s)\|_Y + \|f(s) - f(a)\|_Y \leq (M+\varepsilon)(s+\xi-a).$$

Donc $s+\eta \in I$, et on a une contradiction. Le théorème est donc démontré.

Théorème 2.1.2 *(cas général) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et soit f une application d'un ouvert $U \subset X$ à valeurs dans Y. Soient $a \in U$ et $b \in U$, supposons que $[a,b] \subset U$. Si f est continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$, alors*

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq sup_{c\in]a,b[}\|f'(c)\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\|b-a\|_X.$$

Preuve. On pose $\phi(t) = f(a+t(b-a))$. On a $\phi(1) = f(b)$, $\phi(0) = f(a)$, et ϕ est continue sur $[0,1]$ (comme composée de deux applications continues). De plus ϕ est différentiable en tout $t \in]0,1[$ (comme composée de deux applications différentiables), et $\phi'(t) = Df(a+t(b-a))(b-a)$. En appliquant le théorème précédent à ϕ, on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t\in]0,1[}\|\phi'(t)\|.$$

Or $\|\phi'(t)\| \leq \|Df(a+t(b-a))\|\|b-a\|$. Le théorème est donc démontré.

Corollaire 2.1.1 *Soit f une application d'un ouvert $U \subset X$ à valeurs dans Y. Soient $a \in U$ et $b \in U$, supposons que $[a,b] \subset U$. Si f est différentiable sur $[a,b]$, alors*

$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\|_Y \leq sup_{c\in]a,b[}\|Df(c) - Df(a)\|_{\mathcal{L}(X;Y)}\|b-a\|_X.$$

Preuve. On pose $\phi(x) = f(x) - Df(a)(x-a)$. Il suffit d'appliquer le théorème 2.1.2 à ϕ sur l'intervalle $[a,b]$.

2.2 Différentiabilité et différentiabilité partielle

Dans cette section Y et X_i, pour $i = 1, ..., n$, désignent des espaces vectoriels réels normés, X est l'espace produit $X_1 \times ... \times X_n$. De plus f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O} \subset X$ dans Y.

Théorème 2.2.1 *Si f admet des différentielles partielles dans un voisinage V_a de $a \in \mathcal{O}$ par rapport à chacune des variables, et si les applications de V_a dans $\mathcal{L}(X;Y)$ définies par $x \to \partial_k f(x)$ sont continues de $(V_a, \|\cdot\|_X)$ dans $(\mathcal{L}(X_k;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X_k;Y)})$, alors f est différentiable dans V_a.*

Preuve. On veut montrer que

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(a+h) - f(a) - \Sigma_{k=1}^n \partial_k f(a)h_k\|}{\|h\|} = 0.$$

On a :

$$f(a+h) - f(a) = \Sigma_{p=1}^n\Big(f(a+\Sigma_{k=1}^p \hat{h}_k) - f(a+\Sigma_{k=1}^{p-1}\hat{h}_k)\Big),$$

avec $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et $\hat{h}_k = (0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$. On en déduit

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \Sigma_{k=1}^n \partial_k f(a)h_k &= \Sigma_{p=1}^n\Big(f(a+\Sigma_{k=1}^p \hat{h}_k) - f(a+\Sigma_{k=1}^{p-1}\hat{h}_k) - \partial_p f(a)h_p\Big) \\ &= \Sigma_{p=1}^n\Big(f(a+\Sigma_{k=1}^p \hat{h}_k) - f(a+\Sigma_{k=1}^{p-1}\hat{h}_k) - \partial_p f(a+\Sigma_{k=1}^{p-1}\hat{h}_k)h_p\Big) \\ &+ \Sigma_{p=1}^n\Big(\partial_p f(a+\Sigma_{k=1}^{p-1}\hat{h}_k)h_p - \partial_p f(a)h_p\Big). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le corollaire 2.1.1 et la continuité des différentielles partielles.

2.3 G-différentiabilité et F-différentiabilité

Dans cette section X et Y désignent des espaces vectoriels réels normés, et f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O} \subset X$ dans Y.

Théorème 2.3.1 *Si l'application f est G-différentiable dans un voisinage V_a de $a \in \mathcal{O}$, et si l'application de V_a dans $\mathcal{L}(X;Y)$ définie par $x \to f'(x)$, est continue de $(V_a, \|\cdot\|_X)$ dans $(\mathcal{L}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X;Y)})$, alors f est F-différentiable dans V_a.*

2.4 Applications bilinéaires

Proposition 2.4.1 *Soient X_1, X_2, et Y des espaces de Banach, et soit B une application bilinéaire de $X_1 \times X_2$ dans Y. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*
1 - B est continue sur $X_1 \times X_2$,
2 - B est continue en $(0,0)$,
3 - Il existe une constante M, telle que pour tout $x_1 \in X_1$, tout $x_2 \in X_2$, on a

$$\|B(x_1,x_2)\|_Y \leq M\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}.$$

L'espace $\mathcal{L}(X_1, X_2; Y)$ des applications bilinéaires continues de $X_1 \times X_2$ dans Y, muni de la norme

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2;Y)} = \sup_{\|x_1\|=\|x_2\|=1}\|B(x_1,x_2)\|_Y = \sup_{\|x_1\|\neq 0,\|x_2\|\neq 0}\frac{\|B(x_1,x_2)\|_Y}{\|x_1\|\|x_2\|}$$

est un espace de Banach.

À toute application B bilinéaire continue de $X_1 \times X_2$ dans Y, on peut associer l'application $\Phi(B) \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2;Y))$ définie par

$$(\Phi(B)x_1)x_2 = B(x_1,x_2).$$

L'application Φ est une isométrie de $\mathcal{L}(X_1,X_2;Y)$ dans $\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;Y))$. L'isomorphisme réciproque Φ^{-1} est défini par

$$\Phi^{-1}(\Lambda)(x_1,x_2) = (\Lambda x_1)x_2.$$

Les espaces $\mathcal{L}(X_1,X_2;Y)$ et $\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;Y))$ étant isométriquement isomorphes, on identifie les éléments de ces deux espaces sans faire mention de Φ ou Φ^{-1}.

Attention. Ne pas confondre $\mathcal{L}(X_1,X_2;Y)$ et $\mathcal{L}(X_1 \times X_2;Y)$. Par exemple, si $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, l'application $(x_1,x_2) \to x_1x_2$ appartient à $\mathcal{L}(X_1,X_2;Y)$ mais pas à $\mathcal{L}(X_1 \times X_2;Y)$.

Lorsque $X_1 = X_2 = X$, on utilise souvent la notation $\mathcal{L}_2(X;Y)$ pour désigner $\mathcal{L}(X,X;Y)$. L'espace $\mathcal{L}_2(X;Y) \equiv \mathcal{L}(X,X;Y)$ est donc identifié à $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$.

2.5 Différentielle seconde

Définition 2.5.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach, soit $U \subset X$ un ouvert de X, et soit f une application de U dans Y. L'application f est dite deux fois différentiable en un point a de U si, et seulement si, f est différentiable dans un voisinage V_a de a, et si l'application*

$x \to Df(x)$, de V_a dans $\mathcal{L}(X;Y)$, est différentiable en a. La différentielle de cette application est appelée différentielle seconde de f en a. Elle est notée $D^2f(a)$ ou $f''(a)$. On a donc

$$D(Df(\cdot))(a) = D^2f(a) \quad (\textit{ou encore} \;\; (f'(\cdot))'(a) = f''(a)).$$

Par définition, la différentielle seconde $D^2f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$. Utilisant l'isomorphisme entre $\mathcal{L}_2(X;Y)$ et $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$, on identifie $D^2f(a)$ à une application bilinéaire continue de $X \times X$ dans Y de la manière suivante :

$$D^2f(a)(d,\delta) = (D^2f(a)d)\delta \quad \text{pour tout } d \in X, \text{ et tout } \delta \in X.$$

Théorème 2.5.1 *(Théorème de Schwarz) Soit f une application d'un ouvert U de X dans Y. Si f est deux fois différentiable en a, alors l'application bilinéaire continue $D^2f(a)$ de $X \times X$ dans Y, est symétrique :*

$$D^2f(a)(d,\delta) = D^2f(a)(\delta,d) \quad \textit{pour tout } d \in X, \textit{ et tout } \delta \in X,$$

soit encore $(D^2f(a)d)\delta = (D^2f(a)\delta)d$.

Si f est une application d'un ouvert U d'un espace produit $X_1 \times X_2$ dans Y, et si f est deux fois différentiable alors les différentielles partielles $\partial_j(\partial_i f(\cdot))(a)$ existent pour $i = 1,2$ et $j = 1,2$. La différentielle partielle $\partial_j(\partial_i f(\cdot))(a)$ appartient à $\mathcal{L}(X_j;\mathcal{L}(X_i;Y))$, elle s'identifie à un élément de $\mathcal{L}(X_j, X_i;Y))$ que l'on note $\partial^2_{ji}f(a)$, ou $\partial_j\partial_i f(a)$, ou encore $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Du Théorème de Schwarz, on déduit

$$\partial_j\partial_i f(a)(d_i,d_j) = \partial_i\partial_j f(a)(d_j,d_i) \quad \text{pour tout } d_i \in X_i, \;\; \text{tout } d_j \in X_j, \;\; i = 1,2, \;\; \text{et } j = 1,2.$$

Preuve du théorème de Schwarz. Démontrons que

$$f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) = D^2f(a)(h,k) + (\|h\| + \|k\|)^2\varepsilon(h,k) \tag{2.1}$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = 0$. L'application Df est différentiable en a, il existe donc une application ε_1 telle que

$$Df(a+u) = Df(a) + D^2f(a)u + \|u\|\varepsilon_1(u), \quad \text{avec } \lim_{u\to 0}\varepsilon_1(u) = 0. \tag{2.2}$$

L'application

$$G \; : \; k \mapsto f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) - D^2f(a)(h,k)$$

est différentiable, et sa différentielle en k est

$$\begin{aligned} DG(k) &= Df(a+h+k) - Df(a+k) - D^2f(a)h \\ &= [Df(a+h+k) - Df(a) - D^2f(a)(h+k)] \\ &\quad -[Df(a+k) - Df(a) - D^2f(a)k]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

On majore (2.3) en utilisant (2.2) avec $u = h+k$ et $u = k$. On en déduit

$$\|DG(k)\| \leq \|h\| + \|k\|\|\varepsilon_1(h+k)\| + \|k\|\|\varepsilon_1(k)\| \leq (\|h\| + \|k\|)\varepsilon(h,k),$$

avec $\varepsilon(h,k) = \|\varepsilon_1(h+k)\| + \|\varepsilon_1(k)\|$. Appliquant le théorème des accroissements finis à G, on obtient :

$$\|G(k) - G(0)\| = \|G(k)\| \leq (\|h\| + \|k\|)\|k\| \sup_{\|\xi\|\leq\|h\|}\|\varepsilon(h,k)\|.$$

On a bien $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sup_{\|\xi\|\leq\|h\|}\|\varepsilon(h,k)\|$. Donc (2.1) est démontré. De (2.1) on déduit :

$$\|D^2f(a)(h,k) - D^2f(a)(k,h)\| \leq 2(\|h\| + \|k\|)^2\varepsilon(h,k).$$

Posons $h = t\delta$ et $k = td$, dans l'inégalité précédente, divisant par t^2, et faisant tendre t vers zéro, on obtient le résultat souhaité.

2.6 Applications de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Si f est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $D^2 f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, définie par

$$D^2 f(a)(d,\delta) = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=1}^n \partial_j \partial_i f(a) d_i \delta_j.$$

En d'autres termes

$$\begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \dots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \partial_2\partial_1 f(a) & \dots & \partial_2\partial_n f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \dots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

est la matrice de la forme bilinéaire symétrique $D^2 f(a)$. Cette matrice est appelée matrice hessienne de f en a, elle est notée $\nabla^2 f(a)$.

2.7 Formules de Taylor

Dans cette section f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O}$ de X dans Y, X et Y sont des espaces normés. Le segment $[a, a+h]$ est contenu dans $\mathcal{O}$.

2.7.1 Formules de Taylor à l'ordre 1

Proposition 2.7.1 *(formule de Taylor-Young) Si f est différentiable en a, alors*

$$f(a+d) = f(a) + f'(a)d + \|d\|\varepsilon(d), \quad \text{avec } lim_{\|d\|\to 0}\varepsilon(d) = 0.$$

Proposition 2.7.2 *(formule de Taylor avec reste intégral) Si Y est complet, et si f est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$, alors*

$$f(a+d) = f(a) + \int_0^1 f'(a+td)d\,dt.$$

2.7.2 Formules de Taylor à l'ordre 2

Proposition 2.7.3 *(formule de Taylor-Young) Si f est deux fois différentiable en a, alors*

$$f(a+d) = f(a) + f'(a)d + \frac{1}{2} f''(a)(d,d) + \|d\|^2\varepsilon(d), \quad \text{avec } lim_{\|d\|\to 0}\varepsilon(d) = 0.$$

Proposition 2.7.4 *(formule de Taylor avec reste intégral) Si Y est complet, et si f est de classe C^2 sur $\mathcal{O}$, alors*

$$f(a+d) = f(a) + f'(a)d + \int_0^1 (1-t) f''(a+td)(d,d)\,dt.$$

Remarque. L'hypothèse Y complet est utilisée pour donner un sens aux intégrales $\int_0^1 f'(a+td)d\,dt$ et $\int_0^1 (1-t)f''(a+td)(d,d)\,dt$.

Remarque. Si f est continue sur $\mathcal{O}$, et différentiable sur $]a, a+h[\subset \mathcal{O}$, et si

$$Y = \mathbb{R},$$

alors il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(a+d) = f(a) + f'(a+\theta d)d.$$

Cette formule, connue sous le nom de formule de Taylor-MacLaurin, n'est vérifiée que si $Y = \mathbb{R}$, et ne peut pas être étendue au cas vectoriel!! Si f est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$, deux fois différentiable sur $]a, a+h[\subset \mathcal{O}$, et si

$$Y = \mathbb{R},$$

alors il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(a+d) = f(a) + f'(a)d + \frac{1}{2}f''(a+\theta d)(d,d).$$

C'est la formule de Taylor-MacLaurin d'ordre 2.

Pour démontrer la formule de Taylor-Young, on établit tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.7.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et ψ une application d'un ouvert $\mathcal{O}$ de E contenant 0. On suppose que ψ est différentiable dans $\mathcal{O}$, $\psi(0) = 0$, $D\psi(0) = 0$ et $lim_{x\to 0}\frac{\|D\psi(x)\|}{\|x\|^{n-1}} = 0$. Alors*

$$lim_{x\to 0}\frac{\|\psi(x)\|}{\|x\|^n} = 0.$$

Preuve. Soit $\delta > 0$ tel que $B_E(0,\delta) \subset \mathcal{O}$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $0 < \eta(\varepsilon) \leq \delta$ tel que, pour tout $x \in B_E(0,\eta)$, on ait $\|\psi(x)\| \leq \varepsilon\|x\|^n$. Par hypothèse, il existe $\xi \in]0,\delta]$ tel que $\|D\psi(x)\| \leq \varepsilon\|x\|^{n-1}$ pour tout $x \in B_E(0,\xi)$. Montrons que $\eta = \xi$ convient. Du théorème des accroissements finis, on déduit que

$$\|\psi(x) - \psi(0)\| = \|\psi(x)\| \leq \sup_{t\in]0,1[}\|D\psi(tx)\|\|x\|.$$

Pour tout $t \in]0,1[$ et tout $\|x\| < \eta$, on a $\|tx\| = t\|x\| \leq \|x\| < \eta$. Donc $\|D\psi(tx)\| \leq \varepsilon t^{n-1}\|x\|^{n-1} \leq \varepsilon\|x\|^{n-1}$. On obtient donc $\|\psi(x)\| \leq \varepsilon\|x\|^n$.

Preuve de la formule de Taylor-Young d'ordre 2. L'application f est deux fois différentiable en a, donc l'application $\varepsilon \ : \ X \mapsto \mathcal{L}(X;Y)$ définie par

$$\varepsilon(h) = \frac{Df(a+h) - Df(a) - D^2f(a)h}{\|h\|},$$

vérifie $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Posons

$$\psi(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \frac{1}{2}D^2f(a)(h,h).$$

On a $\psi(0) = 0$, $D\psi(h)k = Df(a+h)k - Df(a)k - D^2f(a)(h,k)$. Donc $D\psi(0) = 0$. De plus $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{D\psi(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0}\varepsilon(h) = 0$. La formule de Taylor-Young découle donc du Lemme 2.7.1.

Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral. On pose

$$\psi(t) = f(a+th) + (1-t)f'(a+th)h.$$

On a $\psi(1) - \psi(0) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ et $\psi'(t) = (1-t)f''(a+th)(h,h)$. Le résultat en découle.

2.8 Exercices

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, puis que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2 - La fonction f est-elle deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Reprendre les questions de l'exercice 1 avec la fonction g définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(y/x) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\alpha \geq 2$.

Exercice 3. Déterminer les points critiques de f et leur nature dans les cas suivants

a) $\quad f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2,$

b) $\quad f(x,y) = a^2 + 3y^2 - x^2 + \dfrac{(x^2-y^2)^2}{a^2},$

c) $\quad f(x,y) = e^{-2x}[5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 1].$

Exercice 4. En utilisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (u,v) = (x-y, x+y)$, déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5. Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variable $(x,y) \mapsto (u,v) = (x+ct, x-ct)$. Quelles sont les solutions qui vérifient $f(x,0) = a(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = b(x)$, où a et b sont deux fonctions régulières données.

Exercice 6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\rho > 0$, on pose

$$M_\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta) d\theta.$$

En utilisant le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f, montrer que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{4}{\rho^2} [M_\rho(x,y) - f(x,y)] = \Delta f(x,y).$$

(On rappelle que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.)

Exercice 7. Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application deux fois différentiable dans $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 - Montrer que si f admet un minimum local en $a \in \mathcal{O}$, alors $\nabla f(a) = 0$ et $\nabla^2 f(a)$ est semi-définie positive.

2 - Montrer que si $a \in \mathcal{O}$, $\nabla f(a) = 0$ et $\nabla^2 f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.

Exercice 8. Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, de rang n, avec $m > n$. On pose $f(x) = \|Ax - b\|^2_{\mathbb{R}^m}$, où b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^m$. Déterminer la solution du problème

$$\inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exercice 9. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$; $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur C si pour tout $(x, x') \in C \times C$ et tout $\alpha \in]0,1[$ on a :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \ \leq \ \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x') \ . \tag{1}$$

f est dite **strictement convexe** sur C quand l'inégalité (1) est stricte dès que $x \neq x'$.

1 - Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est convexe sur C si et seulement si :

$$f(x) \ \geq \ f(\bar{x}) + (\ \nabla f(\bar{x}) \mid x - \bar{x}\ ) \quad \forall (x, \bar{x}) \in C \times C \ . \tag{2}$$

Montrer que f est strictement convexe sur C si et seulement si l'inégalité (2) est stricte dès que $x \neq x'$.

2 - Montrer que si f est convexe sur C et si $\bar{x} \in C$ est un minimum local de f sur C, alors $\bar{x}$ est un minimum global de f sur C.

3 - Déterminer une CNS pour qu'un point $\bar{x} \in C$ soit un minimum de f sur C.

Exercice 10. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f(x,y) = x^3 + xy^2 + y^2$ au point $(1,2)$.

Exercice 11. Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Calculer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,5)$.

Exercice 12. Considérons la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par $(cos^3 t, sin^3 t, cos\, 2t)_{t \in \mathbb{R}}$. Calculer l'équation de la tangente, et du plan normal en un point de la courbe.

Exercice 13. Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 3x - 4y - z$. Soient $C = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, $C_0 = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$, $C_1 = \{(x,y,z) \mid x = 0, y > 0, z > 0\}$, $C_2 = \{(x,y,z) \mid x > 0, y = 0, z > 0\}$, $C_3 = \{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z = 0\}$, $D_1 = \{(0,0,z) \mid z > 0\}$, $D_2 = \{(0,y,0) \mid y > 0\}$, $D_3 = \{(x,0,0) \mid x > 0\}$. Déterminer, lorsqu'il existe, le minimum de f sur C_0, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, et calculer la valeur correspondante de l'infimum. En déduire la solution du problème d'optimisation $\inf\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in C\}$.

Chapitre 3

Théorèmes d'inversion locale et applications

3.1 Théorèmes d'inversion

Dans cette section X et Y désignent deux espaces de Banach.

Théorème 3.1.1 *(Théorème de l'application ouverte) Soit Λ un opérateur linéaire, continu et surjectif de X sur Y. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\Lambda(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,c)$. (On peut démontrer que cet énoncé est équivalent à : l'image de tout ouvert de X par Λ est un ouvert de Y.)*

Corollaire 3.1.1 *Soit Λ un opérateur linéaire, continu et bijectif de X sur Y. Alors Λ^{-1} est continu de Y dans X.*

Définition 3.1.1 *(Isomorphisme d'espaces de Banach) Un opérateur f linéaire, continu de X dans Y, est un isomorphisme de X dans Y si, et seulement si, f est bijectif. (D'après le corollaire sur l'inverse, f^{-1} appartient aussi à $\mathcal{L}(X;Y)$.) L'ensemble des isomorphismes de X dans Y est noté Isom$(X;Y)$.*

Définition 3.1.2 *(Difféomorphisme) Soient $U \subset X$ un ouvert de X, et $V \subset Y$ un ouvert de Y. Une application f de U dans V est un difféomorphisme de U dans V si, et seulement si, f est bijective, f est différentiable dans U, et f^{-1} est différentiable dans V.*

Si de plus f et f^{-1} sont de classe C^r, avec $r \geq 1$, on dit que f est un C^r-difféomorphisme (ou un difféomorphisme de classe C^r).

À l'aide du théorème de dérivation des applications composées, on peut facilement calculer la différentielle de l'inverse d'un difféomorphisme. Avec les notations de la définition précédente, on a

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V, \quad Df^{-1} \circ Df = \mathrm{id}_X, \quad Df \circ Df^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

On a donc $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$. De plus, on peut démontrer que l'application de $\mathrm{Isom}(X; Y)$ dans lui-même, qui à Λ associe Λ^{-1} est continue. On en déduit que si l'application $x \mapsto Df(x)$ est continue de U dans $\mathcal{L}(X;Y)$, et si f est un difféomorphisme de U dans V, alors l'application $y \mapsto Df^{-1}(y)$ est continue sur V.

Rappelons la définition suivante.

Définition 3.1.3 *(Homéomorphisme) Soient $U \subset X$ un ouvert de X, et $V \subset Y$ un ouvert de Y. Une application f de U dans V est un homéomorphisme de U sur V si, et seulement si, f est bijective, f est continue dans U, et f^{-1} est continue dans V.*

Lemme 3.1.1 *Soient $\Lambda \in Isom(X;Y)$ et $L \in \mathcal{L}(X;Y)$ tel que $\|L\| \leq 1/\|\Lambda^{-1}\|$. Alors $\Lambda - L$ est inversible et*

$$(\Lambda - L)^{-1} = \Lambda^{-1}(I - \Lambda^{-1}L)^{-1} = \Lambda^{-1}\Sigma_{k=0}^{\infty}(\Lambda^{-1}L)^k.$$

Preuve. De la majoration

$$\|\Lambda^{-1}L\| \leq \|\Lambda^{-1}\|\|L\| < 1,$$

on déduit que la suite des sommes partielles

$$S_\ell = \Sigma_{k=0}^{\ell}(\Lambda^{-1}L)^k$$

est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X;X)$. La suite est donc convergente, et la proposition en découle.

Proposition 3.1.1 *(Inversion d'un homéomorphisme) Soit f un homéomorphisme de U sur V. On suppose que f est différentiable en $a \in U$, et que sa différentielle $Df(a)$ est un isomorphisme de X sur Y. Alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$, et sa différentielle vérifie $Df^{-1}(b) = (Df(a))^{-1}$.*

Si f est différentiable sur U, et si sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de X sur Y, alors f^{-1} est différentiable sur V. Si de plus f est de classe C^1 sur U, alors f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Preuve. La fonction f étant différentiable en a, on a :

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \ \lim{}_0 \, \varepsilon = 0.$$

La différentielle $Df(a)$ étant un isomorphisme, on peut écrire

$$x - a = Df(a)^{-1}(f(x) - f(a)) - \|x-a\|Df(a)^{-1}(\varepsilon(x-a)), \tag{3.1}$$

soit encore

$$\|x-a\| \leq \frac{1}{1 - \|Df(a)^{-1}(\varepsilon(x-a))\|}\|Df(a)^{-1}\| \, \|f(x) - f(a)\|$$

pour tout x dans un voisinage de a. En posant $y = f(x)$ et $b = f(a)$ dans (3.1), avec la majoration précédente, on obtient

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - Df(a)^{-1}(y-b)\| \leq C\|y-b\| \, \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)).$$

Posons $y = b + h$ et $\tilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b))$. Comme f^{-1} est continue, nous pouvons montrer que $\lim_{h\to 0}\tilde{\varepsilon}(h) = 0$, et la preuve est complète.

Proposition 3.1.2 *(Perturbation d'un homéomorphisme d'inverse Lipschitzien par une application Lipschitzienne) Les notations sont celles de la définition 1.3. Soit g un homéomorphisme de U sur V. On suppose que g^{-1} est Lipschitz de rapport $\frac{1}{M}$, i.e. vérifie*

$$M\|x_1 - x_2\| \leq \|g(x_1) - g(x_2)\|.$$

Soit h une application de U dans Y, Lipschitz de rapport $k < M$. Alors $f = g + h$ est un homéomorphisme de U sur l'ouvert $f(U)$.

Preuve.
1 - Montrons que f est injective. Par une minoration classique, avec les hypothèses sur g et h, pour tout $x_1 \in U$, tout $x_2 \in U$, on a :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \|g(x_1) - g(x_2)\| - \|h(x_1) - h(x_2)\| \geq (M - k)\|x_1 - x_2\|,$$

pour tout $x_1 \in U$, et tout $x_2 \in U$. La fonction f est donc injective sur U, et bijective de U sur $f(U)$.
2 - Montrons que $f(U)$ est ouvert. Pour cela, il suffit de montrer que l'image de toute boule $\overline{B}(a,r) \subset U$ par f, contient une boule de centre $f(a)$. Soit $B(a,r) \subset U$, g étant un homéomorphisme, $g(B(a,r))$ est un ouvert qui contient $g(a)$. Soit $\rho > 0$ tel que $\overline{B}(g(a),\rho) \subset g(B(a,r))$. Posons $\ell = (\min(\rho/M, r))(M-k)$. Montrons que $\overline{B}(f(a),\ell) \subset f(\overline{B}(a, \min(\rho/M, r))) \subset f(\overline{B}(a,r))$.
Soit $y \in \overline{B}(f(a),\ell)$, on cherche $x \in \overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$ tel que $y = f(x)$. Si un tel x existe il vérifiera $y = g(x) + h(x)$, soit encore $x = g^{-1}(y - h(x))$. On recherche x comme point fixe de l'application $\phi_y(x) = g^{-1}(y - h(x))$.
Montrons que ϕ_y est une contraction dans $\overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$. L'image de $\overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$ par ϕ_y est contenue dans $\overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$. En effet, pour tout $x \in \overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$, on a

$$\|\phi_y(x) - a\| = \|g^{-1}(y - h(x)) - g^{-1}(g(a))\| \leq \frac{1}{M}\|y - h(x) - g(a)\|$$

$$\leq \frac{1}{M}(\|y - h(a) - g(a)\| + \|h(a) - h(x)\|) = \frac{1}{M}(\|y - f(a)\| + \|h(a) - h(x)\|)$$
$$\leq \frac{1}{M}\Big((M - k)\min(\rho/M, r) + k\min(\rho/M, r)\Big) = \min(\rho/M, r),$$

car $\|y - f(a)\| \leq \ell = (M - k)(\min(\rho/M, r))$. On vérifie aisément que ϕ_y est une contraction en écrivant

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| = \|g^{-1}(y - h(x_1)) - g^{-1}(y - h(x_2))\| \leq \frac{1}{M}\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{k}{M}\|x_1 - x_2\|.$$

Étant donné que ϕ_y est une contraction dans $\overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$, il existe un et un seul $x \in \overline{B}(a, \min(\rho/M, r))$ tel que $y = f(x)$. Donc f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$. La proposition est donc démontrée.

Théorème 3.1.2 *(Théorème d'inversion locale) Soient U un ouvert de X et f une application de U dans Y, de classe C^1. Soit a un point de U. Si $Df(a)$ est un isomorphisme de X dans Y, alors il existe un voisinage ouvert V_a de a, et un voisinage ouvert W_b de $b = f(a)$, tels que la restriction de f à V_a (encore notée f) soit un C^1-difféomorphisme de V_a sur W_b. De plus, en tout point $y = f(x)$ de W_b, la différentielle de l'application inverse f^{-1} vérifie $Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$.*

Preuve. Posons $g(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$. L'application g est inversible et $g^{-1}(y) = a + Df(a)^{-1}(y - f(a))$. L'application g^{-1} est Lipschitzienne, en effet $\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| \leq \|Df(a)^{-1}\|\,\|y_1 - y_2\|$. On pose $M = \|Df(a)^{-1}\|^{-1}$, et $h(x) = f(x) - g(x)$. On a $Dh(x) = Df(x) - Df(a)$. Du théorème des accroissements finis, on déduit

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \sup_{\xi \in]x_1, x_2[}\|Df(\xi) - Df(a)\|\,\|x_1 - x_2\|.$$

Soit $k < M$. L'application $Df(\cdot)$ étant continue en a, il existe un voisinage $V_a = B(a, \rho) \subset U$ de a tel que $\|Df(\xi) - Df(a)\| \leq k$ pour tout $\xi \in B(a, \rho)$. De la proposition précédente, on déduit que $f = g + h$ est un homéomorphisme de $B(a, \rho)$ sur $f(B(a, \rho))$. De plus, pour tout $x \in B(a, \rho)$, on a $\|Dg(x)^{-1}\| = \|Df(a)^{-1}\| = M^{-1}$ et $\|Dh(x)\| < k < M$. Donc, pour tout $x \in B(a, \rho)$, $Df(x)$ est inversible et de la proposition 3.1.1, on déduit que f^{-1} est de classe C^1.

3.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 3.2.1 *Soient X_1, X_2, Y des espaces de Banach. Soient $\mathcal{O} \subset X_1 \times X_2$ un ouvert de $X_1 \times X_2$, et f une application de classe C^1 sur $\mathcal{O}$, à valeurs dans Y. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{O}$ et $b = f(a)$. Si $\partial_2 f(a)$ est un isomorphisme de X_2 sur Y, alors il existe un voisinage ouvert V_1 de a_1, un voisinage ouvert V_2 de a_2, et une application continue (appelée fonction implicite) φ de V_1 dans X_2, tels*

$$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } f(x) = b \quad \text{si et seulement si} \quad x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = \varphi(x_1).$$

De plus, l'application φ est différentiable en a_1 et

$$D\varphi(a_1) = -[\partial_2 f(a)]^{-1} \partial_1 f(a)$$

Preuve. Définissons F par $F(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1, x_2))$. L'application F est de classe C^1 et $DF(a)(d_1, d_2) = (d_1, \partial_1 f(a) d_1 + \partial_2 f(a) d_2)$. $DF(a)$ est un isomorphisme de $X_1 \times X_2$ sur $X_1 \times Y$, et son inverse est

$$DF(a)^{-1}(d_1, \delta) = (d_1, (\partial_2 f(a))^{-1}(\delta - \partial_1 f(a) d_1)).$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathcal{O}$ contenant a, tel que $F(\Omega)$ soit un ouvert de $X_1 \times Y$, et F est un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur $F(\Omega)$. L'application F^{-1} est de la forme $F^{-1}(x_1, y) = (x_1, \psi(x_1, y))$. De plus,

$$(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad \text{et} \qquad y = f(x)$$

si, et seulement si,

$$(x_1, y) \in F(\Omega) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \psi(x_1, y).$$

On pose $\varphi(x_1) = \psi(x_1, b)$, $V_1 = \{x \in \Omega_1 \mid (x_1, f(a)) \in F(\Omega)\}$, et $V_2 = \Omega_2$. On vérifie que V_1 est un voisinage de a. De plus, de l'équivalence précédente on déduit que $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ et $f(x) = b$ si, et seulement si, $x_1 \in V_1$ et $x_2 = \varphi(x_1)$. Le théorème est démontré.

3.3 Théorème de Liusternik

Définition 3.3.1 *(Vecteur tangent en un point à un ensemble) Soit X un espace vectoriel normé et C un sous-ensemble de X. Un vecteur $d \in X$ est appelé vecteur tangent à C au point $x_0 \in C$ si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ et une application ε de $[-\alpha, \alpha]$ dans X tels que*

$$x_0 + td + t\varepsilon(t) \in C \text{ pour tout } t \in [-\alpha, \alpha], \qquad \text{et} \qquad lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

L'ensemble de tous les vecteurs tangents à C au point x_0 est noté $T_C(x_0)$. Si $T_C(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de X, il est appelé espace tangent à C au point x_0.

Théorème 3.3.1 *(Théorème de Liusternik) Soient X et Y deux espaces de Banach. Soient U un ouvert de X et f une application de U dans Y, de classe C^1. Posons $C = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, et soit a un point de C. Si $Df(a)$ est un opérateur surjectif de X sur Y, alors $T_C(a) = Ker\, Df(a)$.*

Théorème 3.3.2 *(Version dimension finie) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et g une application de U dans $\mathbb{R}^p$, de classe C^1. Posons $C = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$, et soit a un point de C. Si $Dg(a)$ est un opérateur surjectif de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$, alors $T_C(a) = Ker\, Dg(a)$.*

Preuve. Posons

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}.$$

On a

$$Dg(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \dots & \partial_n g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \partial_2 g_2(a) & \dots & \partial_n g_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_p(a) & \partial_2 g_p(a) & \dots & \partial_n g_p(a) \end{pmatrix}.$$

L'application $Dg(a)$ étant surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on a $n \geq p$ et il existe une matrice $p \times p$, constituée de p colonnes de $Dg(a)$, inversible. On suppose que cette matrice correspond aux p dernières composantes de $Dg(a)$. On pose $x = (y, z)$ avec $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ et $\mathbb{R}^p$. On a

$$Dg(a) = (\, D_y g(a) \mid D_z g(a)\,),$$

et $D_z g(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $\Omega_y \times \Omega_z$ de $a = (a_y, a_z)$, et une application ϕ de Ω_y dans Ω_z telle que $(y, z) \in \Omega_y \times \Omega_z$ et $g(y, z) = 0$ si et seulement si $y \in \Omega_y$ et $z = \phi(y)$.

Montrons que $T_C(a) \subset Ker\, Dg(a)$. Soit $d \in T_C(a)$. Il existe une application ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $a + td + t\varepsilon(t) \in C$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$. On a donc $g(a + td + t\varepsilon(t)) = 0$ et $g(a + td + t\varepsilon(t)) = g(a) + Dg(a)(td + t\varepsilon(t)) + \|td + t\varepsilon(t)\|\xi(td + t\varepsilon(t))$, avec $\lim_0 \xi = 0$. En divisant l'égalité précédente par t et en faisant tendre t vers 0, on obtient $Dg(a)d = 0$, i.e. $d \in Ker\, Dg(a)$. Donc $T_C(a) \subset Ker\, Dg(a)$.

Montrons l'inclusion contraire. Soit $d \in Ker\, Dg(a)$. On a

$$0 = Dg(a)d = Dg(a)(d_y, d_z) = D_y g(a) d_y + D_z g(a) d_z,$$

donc $d_z = -(D_z g(a))^{-1}(D_y g(a) d_y)$. De plus, pour t voisin de 0, on a $g(a_y + td_y, \phi(a_y + td_y)) = 0$ et $\phi(a_y + td_y) = \phi(a_y) + tD\phi(a_y)d_y + \|td_y\|\zeta(td_y)$, avec $\lim_0 \zeta = 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, on a également $D\phi(a_y)d_y = -(D_z g(a))^{-1}(D_y g(a) d_y) = d_z$. On en déduit $(a_y + td_y, \phi(a_y + td_y)) = (a_y + td_y, \phi(a_y) + td_z + \|td_y\|\zeta(td_y)) \in C$, avec $\lim_0 \zeta = 0$. On a donc $d \in T_C(a)$.

3.4 Applications

Théorème 3.4.1 *(Théorème des multiplicateurs de Lagrange) Soient X et Y deux espaces de Banach, et g une application de X dans Y. Soient f une application d'un ouvert U de X*

à valeurs dans $\mathbb{R}$, *et* $C = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. *Si* f *admet un extremum sur* C *au point* a, *si* f *est différentiable en* a, *si* g *est de classe* C^1 *au voisinage de* a, *et si* $Dg(a)$ *est un opérateur surjectif, alors il existe* $\lambda \in Y'$ *(le dual topologique de* Y*), tel que*

$$Df(a)d + \lambda\, Dg(a)d = 0 \quad \textit{pour tout } d \in X.$$

Théorème 3.4.2 *(Théorème des multiplicateurs de Lagrange en dimension finie) Soit* $g = (g_1, ..., g_p)$ *une application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$. *Soient* f *une application d'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *et* $C = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. *Si* f *admet un extremum sur* C *au point* a, *si* f *est différentiable en* a, *si* g *est de classe* C^1 *au voisinage de* a, *et si, pour* $i = 1, ..., p$, *les vecteurs* $Dg_i(a)$ *sont linéairement indépendants, alors il existe* $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que*

$$Df(a) + \Sigma_{i=1}^{p} \lambda_i\, Dg_i(a) = 0.$$

Les réels λ_1,...,λ_p *sont appelés multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes* $g_i(x) = 0$, $i = 1, ..., p$.

Preuve. Pour tout $d \in T_C(a)$, on a $a + td + t\varepsilon(t) \in C$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$. On en déduit

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(a + td + t\varepsilon(t)) - f(a)}{t} \geq 0.$$

En d'autres termes $Df(a)d \geq 0$ pour tout $d \in T_C(a)$. Les vecteurs $Dg_i(a)$ étant linéairement indépendants, l'application $Dg(a)$ est surjective et, d'après le théorème de Liusternik, $T_C(a) = Ker\, Dg(a)$. L'ensemble $Ker\, Dg(a)$ étant un sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$, l'inégalité $Df(a)d \geq 0$, pour tout $d \in T_C(a)$, est équivalente à $Df(a)d = 0$ pour tout $d \in T_C(a)$. Cela signifie que $\nabla f(a) \in (Ker\, Dg(a))^{\perp} = Im(Dg(a)^T)$. Il existe donc $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla f(a) = -Dg(a)^T \lambda = -\Sigma_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(a)$, soit encore $Df(a) + \Sigma_{i=1}^{p} \lambda_i\, Dg_i(a) = 0$.

3.5 Exercices

Exercice 1. Trouver les équations du plan tangent et de la droite normale à la surface $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ au point $(2, 2, 3)$.
Même question avec la surface $z = ln(x^2 + y^2)$ au point $(1, 0, 0)$.

Exercice 2. Considérons la surface paramétrée par $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et définie par :

$$x = \frac{1}{2} sin(u) sin(v)\ , \quad y = \frac{1}{2}(u - sin(u) cos(v))\ , \quad z = sin(u).$$

Trouver l'équation de la normale à cette surface en $(u, v) = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

Exercice 3. On définit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = x^2 y + e^x + z.$$

Montrer que $f(0, 1, -1) = 0$ et qu'il existe une fonction différentiable g définie dans un voisinage de $(1, -1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $g(1, -1) = 0$ et $f(g(y, z), y, z) = 0$.
Calculer la valeur des dérivées partielles de g au point $(1, -1)$.

Exercice 4. Considérons $H :\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

ainsi que les ensembles de niveau $N_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H(x,y) = C\}$, pour $C \in \mathbb{R}$.

(i) Représenter graphiquement N_0 (approximativement). Localiser la position de N_C par rapport à N_0 suivant le signe de C .

(ii) Supposons $(x_0, y_0) \in N_C$. Sous quelles conditions la relation $H(x,y) = C$ définit-elle localement, au voisinage de (x_0, y_0) une fonction $y = \varphi(x)$?

(iii) Quelles sont les valeurs $x_0 \in \mathbb{R}$ telles $(x_0, 0) \in N_C$ et telles que l'équation $H(x,y) = C$ définisse localement, au voisinage de $(x_0, 0)$ une fonction $x = \varphi(y)$?

(iv) Quels sont les points de N_C à tangente verticale ?

Exercice 5. On considère le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & + & t^2 & = & 0, \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + & t & = & 2, \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0, \end{array} \right.$$

d'inconnues $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Vérifier que le point $(0,-1,1,0)$ est solution. Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à (x,y,z) au voisinage de ce point. Calculer la dérivée en 0 de l'application $t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$ ainsi définie.

Exercice 6. Soit $\mathcal{M}_{n\times n}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\Psi(M) = \det(M)$, et $f(M,\lambda) = \det(M - \lambda I)$.

1 - Calculer $D\Psi(M)P$ lorsque $n = 2$, $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

2 - Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A,\ell)$ en fonction de la différentielle de Ψ (on ne cherchera pas à calculer cette différentielle).

3 - Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(M,\lambda,\mu) = \left[\begin{array}{c} f(M,\lambda) \\ f(M,\mu) \end{array} \right].$$

Calculer $D_{\lambda,\mu}F(M,\lambda,\mu)$ (la différentielle partielle de F en M,λ,μ, par rapport au couple (λ,μ)) en fonction des dérivées partielles de f.

4 - Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, et $\ell \in \mathbb{R}$, tels que $f(A,\ell) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A,\ell) \neq 0$ (en d'autres termes ℓ est valeur propre simple de A). Dans ce cas, que permet de dire le théorème des fonctions implicites appliqué à l'application f de $\mathcal{M}_{n\times n} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

5 - Montrer que, si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux valeurs propres simples (donc distinctes) de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, alors il existe une voisinage $\tilde{V}$ de A dans $\mathcal{M}_{n\times n}$, un voisinage $\tilde{W}$ de (ℓ_1, ℓ_2) dans $\mathbb{R}^2$, et une application $\tilde{\phi}$ de $\tilde{V}$ dans $\mathbb{R}^2$, tels que, pour toute matrice $M \in \tilde{V}$, $\tilde{\phi}(M)$ est un couple de valeurs propres réelles simples de M.

Exercice 7. Trouver les points de la courbe (C) d'équation $x^6 + y^6 = 1$ qui minimisent (ou maximisent) la distance à l'origine.

Exercice 8. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Que peut-on dire des vecteurs x qui satisfont à la condition $x^T x = 1$ et qui minimisent (ou maximisent) l'expression $x^T A x$?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,u,v) \;=\; (u^3 + vx + y \;,\; uy + v^3 - x)$$

et $S = \{(x,y,u,v) \mid f(x,y,u,v) = (0,0)\}$. Soit $\bar{M} = (\bar{x},\bar{y},\bar{u},\bar{v}) \in S$. Dans quels cas S peut-il être représenté localement au voisinage de $\bar{M}$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \varphi_1(x,y), \\ v & = & \varphi_2(x,y). \end{array} \right.$$

Dans cette situation, calculer $\partial\varphi_1/\partial x$.

Exercice 10. Soit S l'intersection du plan $x - y + z = 1$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$. En quels points la fonction $f(x,y,z) \;=\; x + 2y + 3z$ atteint-elle sa valeur minimum (resp. maximum) sur S ?

Exercice 11. Quelles sont les dimensions d'une boîte de conserve, ayant un volume d'un litre, qui minimisent la surface de métal utilisée pour sa fabrication ?

Chapitre 4

Systèmes différentiels linéaires

4.1 Introduction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$, $B \in C(I; \mathbb{R}^n)$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad X' = A(t)X + B(t),$$

et l'équation homogène asssociée

$$(H) \qquad X' = A(t)X.$$

Si

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \vdots \\ B_n(t) \end{pmatrix},$$

l'équation (E) est équivalente aux n équations scalaires

$$X_i'(t) = \Sigma_{j=1}^n a_{ij}(t)\, X_j(t) + B_i(t) \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Rappelons le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 4.1.1 *Soit f une fonction continue de $I \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que*

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|X_1 - X_2\|_{\mathbb{R}^n}$$

pour tout $t \in I$, tout $X_1 \in \mathbb{R}^n$, et tout $X_2 \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $t_0 \in I$, tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, le système différentiel

$$X'(t) = f(t, X(t)), \qquad X(t_0) = X_0,$$

admet une solution unique définie sur I.

Théorème 4.1.2 *(Théorème d'existence et d'unicité) Pour tout $t_0 \in I$, tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème*

$$X' = A(t)X + B(t), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{4.1}$$

admet une solution unique définie sur I.

Preuve. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (4.1) admet une solution unique sur tout intervalle $[a, b] \subset I$, contenant t_0. Le théorème en découle.

Remarque. Soit X_1 la solution de $X_1' = AX_1$, $X_1(t_0) = X_0$, et X_2 la solution de $X_2' = AX_2 + B$, $X_2(t_0) = 0$. Alors $X = X_1 + X_2$ est la solution de (4.1). Le calcul de X_2 utilise la résolution de (H) (méthode dite de la variation de la constante). On s'intéresse donc en priorité à la résolution de (H).

4.2 Systèmes homogènes

Théorème 4.2.1 *L'ensemble V des solutions de l'équation $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{R}^n)$ de dimension n. De plus, pour tout $t_0 \in I$, l'application*

$$X_0 \mapsto X(\,\cdot\,; t_0, X_0)$$

(où $X(\,\cdot\,; t_0, X_0)$ est la solution de $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$) est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur V.

Preuve. Il est facile de vérifier que V est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{R}^n)$.
Soient $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Posons $X_i = X(\,\cdot\,; t_0, \xi_i)$. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des coefficients réels. Alors $\Sigma_{i=1}^n c_i X_i(t) = 0$ pour tout $t \in I$ si, et seulement si, $\Sigma_{i=1}^n c_i \xi_i = 0$. Donc, si $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ n est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $X_1, \ldots, X_n$ est une famille libre de V. Soit $X \in V$. Soient $c_1, \ldots, c_n$ les coefficients réels vérifiant $X(t_0) = \Sigma_{i=1}^n c_i \xi_i$. Il est facile de voir que $X(t; t_0, X(t_0)) = \Sigma_{i=1}^n c_i X_i(t)$. On a donc montré que $X_1, \ldots, X_n$ est une base de V.
L'application définie par

$$\xi \mapsto X(\,\cdot\,; t_0, \xi)$$

est une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ dans V, qui transforme une base de $\mathbb{R}^n$ en une base de V. C'est donc un isomorphisme.

Définition 4.2.1 *Tout ensemble de n solutions linéairement indépendantes de (H) est appelé système fondamental de solutions de (H). En d'autres termes, un système fondamental de solutions de (H) est une base de V.*

Définition 4.2.2 *Si $X_1, ..., X_n$ est un système fondamental de solutions de (H), la matrice $M(t) = [X_1(t), ..., X_n(t)]$ est appelée matrice fondamentale de (H). Si de plus $M(t_0) = I_n$, alors $M(t)$ est appelée matrice fondamentale de (H), spéciale au temps t_0.*

Proposition 4.2.1 *Si $M(t)$ est la matrice fondamentale de (H), spéciale au temps t_0, alors la solution de*

$$X' = AX, \quad X(t_0) = X_0$$

est $X(t) = M(t)X_0$.

Définition 4.2.3 *Une matrice $M(t) = [X_1(t), ..., X_n(t)]$ dont les colonnes X_i sont solutions de (H), est appelée solution matrice de (H).*

Théorème 4.2.2 *(Théorème de Liouville) Soit M une solution matrice de (H), et soit $W_M(t) =$ dét$(M(t))$ pour $t \in I$. (W_M est appelé wronskien de M.) Alors*

$$W_M(t) = W_M(\tau) exp\Big(\int_\tau^t trace(A(s))ds \Big)$$

pour tout $t \in I$, et tout $\tau \in I$.

Preuve. Posons

$$M(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

où, pour $1 \le i \le n$, X_i est solution de (H), c'est à dire vérifie $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$. Compte tenu des régles de dérivation d'un produit et de la définition du déterminant, on vérifie que

$$\frac{d}{dt}\text{dét}\, M(t) = \sum_{i=1}^n \text{dét} \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1}' & \dots & x_{in}' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \text{dét} \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ii}x_{i1} & \dots & a_{ii}x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \text{trace}A(t)\text{dét}M(t).$$

Le théorème s'obtient en intégrant cette identité entre τ et t.

Proposition 4.2.2 *Pour tout $\tau \in I$, notons $X(\cdot\,; \tau, \xi)$ la solution de $X' = AX$, $X(\tau) = \xi$. Pour tout $\tau \in I$ et tout $t \in I$, l'application*

$$\xi \mapsto X(t; \tau, \xi)$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. La matrice $R(t, \tau)$ de cette application est appelée **résolvante** *de (H).*

Proposition 4.2.3 *Pour tout $t_1 \in I$, tout $t_2 \in I$, tout $t_3 \in I$, tout $t \in I$, on a*

(i) $R(t_1, t_2) = R(t_1, t_3)R(t_3, t_2)$,

(ii) $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)^{-1}$,

(iii) $R(t, t_1) = M(t)[M(t_1)]^{-1}$ *pour toute matrice fondamentale M.*

4.3 Systèmes différentiels non homogènes

Pour résoudre l'équation (4.1), on résoud séparément l'équation homogène (H) et l'équation non homogène

$$X' = A(t)X + B(t), \qquad X(t_0) = 0. \tag{4.2}$$

On cherche une solution de (4.2) sous la forme $X(t) = R(t,t_0)V(t) = M(t)M(t_0)^{-1}V(t)$, où $R(t,t_0)$ est la résolvante de (H), et $M(t)$ est une matrice fondamentale de (H). (C'est la méthode dite de la variation de la constante, ici la constante est $V(t) \in \mathbb{R}^n$.) En différentiant, on obtient

$$X'(t) = M'(t)M(t_0)^{-1}V(t)+M(t)M(t_0)^{-1}V'(t) = A(t)M(t)M(t_0)^{-1}V(t)+M(t)M(t_0)^{-1}V'(t).$$

On cherche donc V vérifiant

$$M(t)M(t_0)^{-1}V'(t) = B(t) \qquad \text{et} \qquad V(t_0) = 0.$$

On a donc

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} M(t_0)(M(s))^{-1}B(s)ds \qquad \text{et} \qquad M(t)M(t_0)^{-1}V(t) = \int_{t_0}^{t} M(t)(M(s))^{-1}B(s)ds.$$

La solution de $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$, est donc

$$X(t) = R(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds.$$

4.4 Équations différentielles d'ordre n

Considérons l'équation différentielle d'ordre n :

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x^{(1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}, \tag{4.3}$$

où x est une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$, les coefficients a_i appartiennent à $C(I;\mathbb{R})$. Cette équation est équivalente au système

$$X' = A(t)X, \tag{4.4}$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.4.1 *L'ensemble des solutions de l'équation (4.3) est un espace vectoriel de dimension n. L'équation (4.3) admet une solution et une seule vérifiant la condition initiale*

$$x(t_0) = \alpha_0, \quad x^{(1)}(t_0) = \alpha_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}.$$

Si f_i est solution de (4.3) alors

$$F_i = \begin{pmatrix} f_i \\ f_i^{(1)} \\ \vdots \\ f_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

est solution de (4.4), et réciproquement. On vérifie aisément que n solutions $f_1, \ldots, f_n$ de (4.3) sont linéairement indépendantes si, et seulement si, les fonctions $F_1, \ldots, F_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de (4.4). Le wronskien de $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est $W_F = W(F_1, \ldots, F_n) = \det(F_1, \ldots, F_n)$ (on le notera aussi $W(f_1, \ldots, f_n)$). D'après le théorème de Liouville, on a $W_F(t) = W_F(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^t a_{n-1}(s)ds\Big)$. Les solutions $f_1, \ldots, f_n$ de (4.3) sont linéairement indépendantes si, et seulement si, le wronskien du système est non nul en un point.

Chapitre 5

Systèmes différentiels linéaires autonomes

5.1 Résolvante d'un système linéaire autonome

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on souhaite calculer la résolvante du système $X' = AX$. La matrice fondamentale spéciale en zéro est la solution de $M' = AM$, $M(0) = I$. Calculons M par la méthode de Picard. La suite des itérés correspond à

$M_0 = I,$

$M_1 = I + A\int_0^t M_0(\tau)d\tau = I + tA,$

$\vdots$

$M_n = I + A\int_0^t M_{n-1}(\tau)d\tau = I + \Sigma_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}A^k.$

Proposition 5.1.1 *Posons* $S_n = \Sigma_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}A^k$. *La suite* $(S_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *Sa limite est notée* e^{tA}.

Preuve. Le résultat découle de la majoration

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \Sigma_{k=n+1}^m \frac{t^k}{k!}\|A\|^k \leq e^{t\|A\|}.$$

Proposition 5.1.2 *L'opérateur* **'exponentielle de matrice'** *défini dans la proposition précédente vérifie les propriétés suivantes*

$e^{\mathbf{O}_n} = \mathbf{I}_n,$

$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$,

$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA},$

$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$

Lemme 5.1.1 *Si les séries* $\Sigma_{n=0}^\infty A_n$ *et* $\Sigma_{n=0}^\infty B_n$ *sont absolument convergentes dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *alors la série de terme général* $S_n = \Sigma_{k=0}^n A_{n-k}B_k$ *est absolument convergente et sa somme est* $(\Sigma_{n=0}^\infty A_n)(\Sigma_{n=0}^\infty B_n)$.

Corollaire 5.1.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *La résolvante du système* $X' = AX$ *est*

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}$$

5.2 Calcul de e^{tA}

On considère tout d'abord le cas où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \ldots, m_k$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$. Le sous-espace propre généralisé associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Ker}[(A - \lambda_i I)^{m_i}]$.

Théorème 5.2.1 *L'espace $\mathbb{C}^n$ est somme directe des sous-espaces propres généralisés :*

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k.$$

Théorème 5.2.2 *Pour tout $1 \leq i \leq k$, le sous-espace propre généralisé E_i est globalement invariant par A, c'est à dire vérifie $AE_i \subset E_i$.*

Corollaire 5.2.1 *Il existe une matrice P inversible telle que*

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} P^{-1},$$

où B_i est un bloc $m_i \times m_i$. De plus, si P_i désigne l'opérateur de projection sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$, alors $P_i e^{tA} = e^{tA} P_i = e^{tA_i}$.

Proposition 5.2.1 *Si*

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} P^{-1},$$

alors

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{tB_k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Le calcul de e^{tA} se ramène donc au calcul de e^{tB} où $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, avec $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(B - \lambda I)^m$.

Définition 5.2.1 *On appelle bloc de Jordan d'ordre β, une matrice $\beta \times \beta$ de la forme*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Théorème 5.2.3 *(Théorème de Jordan) Si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, avec $\mathbb{C}^m = Ker(B - \lambda I)^m$ et si $\beta \leq m$ est le plus petit entier tel que $\mathbb{C}^m = Ker(B - \lambda I)^\beta$, alors il existe une base de $\mathbb{C}^m$ dans laquelle la matrice de B est de la forme*

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix},$$

où le nombre γ de blocs de Jordan est $\gamma = \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I))$, et l'ordre du plus grand bloc est égal à β.

Théorème 5.2.4 *Soit B une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. La solution du système*

$$X' = AX + B, \qquad X(t_0) = X_0,$$

est

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

5.3 Méthode pratique de résolution de $X' = AX$

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \dots, m_k$. Pour déterminer la forme générale des solutions de l'équation $X' = AX$, on utilise la décomposition

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k.$$

Théorème 5.3.1 *Soit $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, avec $\xi_i \in E_i$. Alors la solution de $X' = AX$, $X(0) = \xi$ est*

$$X(t) = e^{tA}\xi = e^{\lambda_1 t}P_1(t) + \ldots + e^{\lambda_k t}P_k(t),$$

où P_j est un polynôme vectoriel de degré au plus $m_j - 1$, défini par

$$P_j(t) = [I_n + t(A - \lambda_j I) + \ldots + \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j I)]\xi_j.$$

Preuve. Nous avons

$$X(t) = e^{tA}\xi = e^{tA}\xi_1 + \ldots + e^{tA}\xi_k,$$

et

$$e^{tA}\xi_j = e^{\lambda_j tI + t(A-\lambda_j I)}\xi_j = e^{\lambda_j t}e^{t(A-\lambda_j I)}\xi_j.$$

Étant donné que $(A - \lambda_j I)^{m_j}\xi_j = 0$, on a

$$e^{t(A-\lambda_j I)}\xi_j = \Sigma_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j I)^p\xi_j = P_j(t).$$

Le théorème est donc démontré.

Corollaire 5.3.1 *Si les vecteurs $(e_{ij})_{1\le i\le m_j}$ forment une base de E_j, alors*

$$P_{ij}(t) = \Sigma_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j I)^p e_{ij}, \quad 1 \le j \le k, \quad 1 \le i \le m_j,$$

forment une base de l'espace S des solutions du système $X' = AX$.

5.4 Solutions réelles de $X' = AX$

Si A appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on identifie A à un opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (encore noté A, ou parfois noté $A_{\mathbb{C}}$). Notons $S_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel (complexe) des solutions complexes de $X' = AX$, et $S_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel des solutions réelles de $X' = AX$.

Si $X \in S_{\mathbb{C}}$, alors $\overline{X}' = \overline{AX} = A\overline{X}$, donc $\overline{X} \in S_{\mathbb{C}}$. Par conséquent $U = \mathrm{Re}(X)$ et $V = \mathrm{Im}(X)$ appartiennent à $S_{\mathbb{R}}$. D'un théorème de la section 3, on déduit que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, de multiplicité m, alors il existe m solutions linéairement indépendantes de $X' = AX$ de la forme

$$X(t) = e^{\lambda t}(b_0 + tb_1 + \ldots + t^{m-1}b_{m-1})$$

où $b_0 = \alpha \in \mathbb{C}^n$ est une des m racines du système linéaire $(A - \lambda I)^m\alpha = 0$, et $b_j = \frac{(A-\lambda I)^j}{j!}\alpha$. (Le système $(A - \lambda I)^m\alpha = 0$ a bien m solutions dans $\mathbb{C}^n$, linéairement indépendantes car $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^m) = m$.)

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il est facile de voir que les m solutions de $(A - \lambda I)^m\alpha = 0$ peuvent être choisies dans $\mathbb{R}^n$. Les solutions définies précédemment sont alors réelles et elles constituent une base de $S_{\mathbb{R}}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de multiplicité m. De plus, on a $(A - \lambda I)^m\alpha = 0$ si, et seulement si, $(A - \bar{\lambda}I)^m\bar{\alpha} = 0$. Considérons m solutions linéairement indépendantes de $S_{\mathbb{C}}$, $X_1, \ldots, X_m$, de la forme $X_i(t) = e^{\lambda t}P_i(t)$, avec $P_i(0) = \alpha_i$,

$$\alpha_i \in Ker(A - \lambda I)^m, \quad P_i(t) = b_0^i + tb_1^i + \ldots + t^{m-1}b_{m-1}^i, \quad b_j^i = \frac{(A - \lambda I)^j}{j!}\alpha_i.$$

Alors $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m$ sont aussi m solutions linéairement indépendantes de $S_{\mathbb{C}}$, $\overline{X}_i(t) = e^{\bar{\lambda}t}\overline{P}_i(t)$, $\overline{P}_i(0) = \alpha_i$, et $\bar{\alpha}_i \in Ker(A - \bar{\lambda}I)^m$. On peut vérifier que $U_i = \mathrm{Re}(X_i)$ et $V_i = \mathrm{Im}(X_i)$, pour $1 \leq m \leq m$, constituent $2m$ solutions réelles de $S_{\mathbb{C}}$. Si $\lambda = a + ib$, avec a et b réels, par combinaison des U_i et V_i on peut construire $2m$ solutions réelles, linéairement indépendantes, de la forme

$$e^{at}\cos(bt)(C_0 + C_1t + \ldots + C_{m-1}t^{m-1}),$$
$$e^{at}\sin(bt)(D_0 + D_1t + \ldots + D_{m-1}t^{m-1}),$$

où les coefficients C_i et D_i sont des vecteurs de dimension n.

5.5 Exercices

Exercice 1. Montrer que si a et b sont des fonctions continues de $]r_1, r_2[$ dans $\mathbb{R}$, la solution du problème :

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) , \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

est donnée par :

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}\Big\{ x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u)du}ds\Big\}.$$

Exercice 2. Considérons le système $X'(t) = A(t)X(t)$, où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix}$ est une solution matrice. Calculer la matrice fondamentale spéciale en 1, et la solution du problème

$$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = -\frac{3}{t^2}x + \frac{3}{t}y, \\ x(1) = 2,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Mettre le système :

$$\begin{cases} y'' + 3z' + 2y = 0 \\ z'' + 3y' + 2z = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0\ ,\ z(0) = 0\ ,\ z'(0) = 0, \end{cases}$$

sous la forme standard d'un système du premier ordre.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle linéaire suivante

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = 1, \quad x(-1) = x'(-1) = 0,$$

sachant qu'il existe des solutions de la forme $x = t^\alpha$.

Exercice 5. Considérons les équations suivantes :

$$(H) \qquad X' = A(t)X, \qquad t \in I,$$

$$(H^*) \qquad Y' = -A(t)^T Y, \qquad t \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$.
Soit M une matrice fondamentale de (H), montrer que $P = M^{-T}$ est une matrice fondamentale de (H^*).
Soit M une matrice fondamentale de (H). Montrer que P est une matrice fondamentale de (H^*) si et seulement s'il existe une matrice inversible constante C telle que $P^T M = C$.
Supposons que A est antisymétrique. Montrer que pour toute matrice fondamentale M de (H), il existe une matrice constante C telle que $M^T M = C$. En déduire que toute solution de (H) est bornée.

Exercice 6. On considère le système dans $\mathbb{C}^n$

$$(E_C) \qquad X' = A(t)X, \quad \text{avec} \quad A \in C(I; \mathcal{M}_n(\mathbb{C})),$$

ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On pose $A = B + iC$, où B et C sont des matrices à coefficients réels.

Montrer que X est solution de (E_C) si et seulement si

$$W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

est solution dans $\mathbb{R}^{2n}$ du système

$$(E_R) \qquad W' = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} W$$

et $X = U + iV$.

Montrer que $M = P + iQ$, avec P et Q à coefficients réels, est matrice fondamentale de (E_C) si et seulement si $R = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$ est matrice fondamentale de (E_R).

Exercice 7. Déterminer les solutions du système $X' = AX$ pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = 0, \qquad y''' + y, \qquad y^{(4)} - y = 0.$$

Exercice 9. Montrer que si l'on connait une solution y_1 de l'équation différentielle $y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$, il est possible de rechercher une autre solution de la forme $y_2 = y_1 z$, de sorte que (y_1, y_2) soient linéairement indépendantes. Appliquer cette méthode à l'équation $y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y = 0$, avec $y_1(t) = e^{-t^2}$.

Exercice 10. Trouver la solution générale de l'équation :

$$xy'' - 2y' - xy = 0$$

après avoir vérifié que $y_1 = e^x/x$ était une solution particulière.

Exercice 11. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x' = tx - y + tcost - t^3 sint, \\ y' = x + ty + tsint + t^3 cost, \end{cases}$$

en posant $z = x + iy$.

Chapitre 6

Sujets d'examen

Mai 99

Exercice 1. (4pts)
Déterminer la solution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (\alpha - \beta)x(t) + \beta y(t) \\ y'(t) & = & -\beta x(t) + (\alpha + \beta)y(t) \end{array} \right.$$

vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. (On supposera que $\beta \neq 0$.)
Exercice 2. (4 pts) Soit (E) l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On pose $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Calculer $Dg(\bar{x}, \bar{y})$, où $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$.
Pour déterminer le rectangle de périmètre maximum inscrit dans l'ellipse (E), on se propose de rechercher les solutions du problème

$$\text{minimiser} \quad -4x - 4y, \quad \text{avec } x > 0, \quad y > 0, \quad \text{et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calculer les solutions de ce problème à l'aide du théorème des multiplicateurs de Lagrange, dont on prendra soin de vérifier les hypothèses.

Exercice 3. (6 pts) Soit $\mathcal{M}_{n\times n}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\Psi(M) = \det(M)$, et $f(M, \lambda) = \det(M - \lambda I)$.
1 - Calculer $D\Psi(M)P$ lorsque $n = 2$, $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.
2 - Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A, \ell)$ en fonction de la différentielle de Ψ (on ne cherchera pas à calculer cette différentielle).
3 - Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(M, \lambda, \mu) = \left[\begin{array}{c} f(M, \lambda) \\ f(M, \mu) \end{array} \right].$$

Calculer $D_{\lambda,\mu}F(M, \lambda, \mu)$ (la différentielle partielle de F en M, λ, μ, par rapport au couple (λ, μ)) en fonction des dérivées partielles de f.

4 - Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, et $\ell \in \mathbb{R}$, tels que $f(A,\ell) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A,\ell) \neq 0$ (en d'autres termes ℓ est valeur propre simple de A). Dans ce cas, que permet de dire le théorème des fonctions implicites appliqué à l'application f de $\mathcal{M}_{n\times n} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

5 - Montrer que, si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux valeurs propres simples (donc distinctes) de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, alors il existe une voisinage $\tilde{V}$ de A dans $\mathcal{M}_{n\times n}$, un voisinage $\tilde{W}$ de (ℓ_1,ℓ_2) dans $\mathbb{R}^2$, et une application $\tilde{\phi}$ de $\tilde{V}$ dans $\mathbb{R}^2$, tels que, pour toute matrice $M \in \tilde{V}$, $\tilde{\phi}(M)$ est un couple de valeurs propres réelles simples de M.

Exercice 4. (3pts)
Déterminer les équations du plan tangent, et de la normale à la surface d'équation

$$x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 - v^3, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R},$$

au point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (3, 5, 7)$. ($u = 2$, $v = 1$.)

Exercice 5. (3pts)
Considérons le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & y(t), \\ y'(t) & = & \dfrac{2}{t^2}x(t) + t, \\ x(1) & = & y(1) = 0. \end{array}\right. \tag{6.1}$$

Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}(t,s) = \frac{t^\alpha s^\alpha}{3}\begin{pmatrix} t^4 + 2ts^3 & t^4 s - ts^4 \\ 2t^3 - 2s^3 & 2st^3 + s^4 \end{pmatrix}$$

est la résolvante de (6.1). Calculer la solution de (6.1).

Septembre 99

Exercice 1. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calculer la dérivée de f en $(0,0)$ dans la direction $d = (d_1, d_2) \neq (0,0)$ (1 *point*)

b) f est-elle G-différentiable en $(0,0)$? (1 *point*)

c) f est-elle F-différentiable en $(0,0)$? (2 *points*)

Exercice 2. Soit B une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Soit X l'espace vectoriel des matrices réelles à m lignes et n colonnes et Y celui des matrices réelles carrées d'ordre m. Considérons l'application $f : X \longrightarrow Y$ définie par :

$$f(A) \ = \ AB(AB)^T \ .$$

Calculer $Df(A)H$ pour A et $H \in X$. (3 *points*)

Exercice 3. Considérons la surface (S) d'équation implicite

$$2y - z^3 - 3xz \ = \ 0 \ .$$

Calculer l'équation du plan tangent à (S) en $(1,7,2)$. Calculer, sous forme paramétrique, l'équation de la normale à (S) en $(1,7,2)$. (3 *points*)

Exercice 4. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x + 4y \ .$$

a) Soit $C \ = \ \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0)\}$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $x^2+y^2 > K$ implique $f(x,y) > 1$. En déduire que le problème d'optimisation

$$\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in C\}$$

possède au moins une solution. (2 *points*)

b) Considérons les ensembles :

$$Int(C) = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0)\}\ , \quad H = \{(x,0) \mid x > 0)\}\ et\ \ V = \{(0,y) \mid y > 0)\}\ .$$

Indiquer si les problèmes suivants ont une solution et les calculer s'il y en a.

b1) $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in Int(C)\}$ (1 *point*)

b2) $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in H)\}$ (1 *point*)

b3) $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in V)\}$ (1 *point*)

c) Montrer que le problème $inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in C\}$ n'a qu'une solution et la calculer. (1 *point*)

Exercice 5. Mettre le problème $\{\ x''' + x = 0\ , \quad x(0) = 1\ ,\ x'(0) = x''(0) = 0\}$ sous la forme d'un système du premier ordre et calculer sa solution. (6 *points*)

Mai 2000

Exercice 1. (4pts)
Déterminer la solution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -x(t) + 2y(t) + 1, \\ y'(t) & = & -2x(t) + 3y(t). \end{array} \right. \tag{6.2}$$

On recherchera d'abord une solution constante de (6.2).
Exercice 2. (3 pts) Soit (P) le plan d'équation $3x - 2y + z = 4$. Déterminer le point M de (P) qui minimise la distance au point $(0, 1, -1)$.

(On pourra minimiser le carré de la distance. On prendra soin de vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés.)
Exercice 3. (5 pts) On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x''(t) & = & x'(t) - y(t), \\ y'(t) & = & x'(t) - x(t). \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Écrire ce système sous la forme d'un système du premier ordre dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la solution de (6.3) vérifiant $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 4.
1 (2pts) - Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation

$$(x-1)^2(x+1)^2 + y^2 = 5,$$

au point $(1/2, \sqrt{71}/4)$.
2 (3pts) - On pose $V(x, y) = (x-1)^2(x+1)^2 + y^2$, et pour $c \in \mathbb{R}$

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid V(x, y) = c\}.$$

Montrer que si $c > 1$ et si $(x_0, y_0) \in E_c$, alors il existe un voisinage $V(x_0, y_0)$ de (x_0, y_0) sur lequel E_c est une courbe d'équation $x = \phi(y)$ ou d'équation $y = \psi(x)$.
3 (4pts) - Déterminer les points de E_5 pour lesquels $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = 1$, ou $x = -1$. Calculer l'équation de la tangente à E_5 en chacun de ces points. En déduire un tracé approximatif de E_5. ($\sqrt{71} = 8,426\ldots$.)

Septembre 2000

Exercice 1. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire usuel de x et y dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle Ax, Bx\rangle$$

où A et B sont deux matrices carrées réelles. Etant donnés x et h dans $\mathbb{R}^n$, calculer la valeur de la différentielle en x dans la direction h : $Df(x)h$, et le gradient en x : $\nabla f(x)$.

Exercice 2. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\}.$$

On définit sur U l'application :

$$f(x_1, x_2) \ = \ x_1 x_2 + \alpha^3 (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}),$$

où α est un réel fixé strictement positif. Montrer que f admet un seul point critique et préciser sa nature.

Exercice 3. Quels sont les points de la surface d'équation :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 17\ ,$$

en lesquels le plant tangent à cette surface est parallèle au plan-xy ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, a, b) \ = \ (a^2 x^2 + 4\, b\, x - 5\ ,\ b^2 y^2 + a - 2).$$

On note S l'ensemble des points $(x_0, y_0, a_0, b_0) \in \mathbb{R}^4$ en lesquels le théorème des fonctions implicites permet de conclure qu'il existe un voisinage V du point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et deux applications différentiables $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\alpha(x_0, y_0) = a_0\ ,\quad \beta(x_0, y_0) = b_0 \ \ et\ \ f\Big(x, y, \alpha(x, y), \beta(x, y)\Big) = 0 \ \ \forall (x, y) \in V\, .$$

Parmi les trois points suivants quels sont ceux qui appartiennent à S ? (justifier votre réponse) :

$$(-1, 1, 1, 1) \quad , \qquad (5, -1, 1, -1) \quad , \qquad (-1, 1, 1, -1) \quad .$$

Exercice 5. On considère le problème différentiel :

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\,t^2\,y'' \ + \ 3\,t\,y' \ - \ y \ = \ 0, \\ y'(1) = 1\ ,\ y(1) = 2. \end{array} \right.$$

Sur quel intervalle est-on immédiatement assuré que ce problème possède une solution ?
Après avoir vérifié que la fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est une solution de l'équation homogène associée, résoudre $(\mathcal{P})$. (On pourra rechercher une autre solution sous la forme $t \rightarrow \frac{1}{t} u(t)$.)