Cours 5: Une introduction aux suites numériques

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths, année 2012-2013

Définition

Definition

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$
$$n \to u(n) \qquad \textit{souvent noté } u_n.$$

La suite sera notée u ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. u_n *s'appelle le terme général de la suite.*

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis.

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite,

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite,u_1 le deuxième,

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite,u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc. . .

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc... Enfin, on note u_n le terme général et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite.

Exemples-Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite,u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc... Enfin, on note u_n le terme général et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite. En les choisissant les uns après les autres, on peut construire n'importe quelle suite de nombres. Par exemple,

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 2, u_5 = 14, \ldots$$

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.
Il y a deux façons de construire une suite logique :

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique :

- définition explicite.

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique :

- définition explicite.
  On donne une expression de u_n en fonction de n.

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique :

- définition explicite.
  On donne une expression de u_n en fonction de n.
  Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n - 4$

Exemples-Expression d'une suite

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique :

- définition explicite.
  On donne une expression de u_n en fonction de n.
  Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n - 4$
- suites récurrentes.
  On se donne la règle permettant de passer d'un terme au suivant. Le terme u_n s'exprime en fonction de u_{n-1}.
  Un procédé classique est le suivant :

$$(u_n) \ : \left\{ \begin{array}{l} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

Exemples de suites récurrentes

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,

Exemples de suites récurrentes

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également se donner le premier terme.

Exemples de suites récurrentes

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également se donner le premier terme.

Exemples :

- $(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$

Exemples de suites récurrentes

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également se donner le premier terme.

Exemples :

- (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 3,\ u_2 = 3 + 2 = 5,\ u_3 = 5 + 2 = 7$, etc...

Exemples de suites récurrentes

Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois,on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également se donner le premier terme.

Exemples :

- (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 3$, $u_2 = 3 + 2 = 5$, $u_3 = 5 + 2 = 7$, etc...
- (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_n = 5u_{n-1} \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 15$, $u_2 = 5 \times 15 = 75$, etc...

On voit ici que si l'on veut calculer un terme (par exemple u_{10}), il faut calculer tous les termes précédents.

On voit ici que si l'on veut calculer un terme (par exemple u_{10}), il faut calculer tous les termes précédents.
Cependant, les suites récurrentes sont souvent plus pratiques pour modéliser une situation donnée. Par la suite, on verra comment modéliser une situation (financière) à l'aide de suites récurrentes, puis comment transformer cette suite en une suite explicite pour pouvoir l'exploiter et prévoir le comportement du système que l'on aura modélisé.

Sens de variation

Proposition

- *Une suite u est stationnaire s'il existe un entier p tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+p} = u_p.$$
- *Une suite u est croissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \geq u_n.$$
- *Une suite u est décroissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$
- *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$
- *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Suites bornées

Assez souvent, pour des raisons pratiques, on utilisera plutot la définition suivante :

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists A > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq A.$$

Exemples

Exemples

- La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.

Exemples

- La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.
- La suite (v_n) : $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ est bornée.

Exemples

- La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.
- La suite (v_n) : $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ est bornée.
- La suite (w_n) : $w_n = \sin(n^2 - n + 1)$ est bornée.

Exemples

- La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.
- La suite (v_n) : $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ est bornée.
- La suite (w_n) : $w_n = \sin(n^2 - n + 1)$ est bornée.
- la suite (x_n) : $x_n = n^2$ n'est pas bornée.

Definition de la convergence d'une suite

Definition

Une suite u est convergente si elle admet une limite l quand n tend vers l'infini.
sinon on dit la la suite est divergente.

Definition de la convergence d'une suite

Definition

Une suite u est convergente si elle admet une limite l quand n tend vers l'infini.
sinon on dit la la suite est divergente.

Remarque : Si une suite est convergente, la limite est unique.

Definition de la convergence d'une suite

Definition

Une suite u est convergente si elle admet une limite l quand n tend vers l'infini.
sinon on dit la la suite est divergente.

Remarque : Si une suite est convergente, la limite est unique.
On note $\lim_n u_n = l$.

Definition de la convergence d'une suite

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Definition de la convergence d'une suite

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \; |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans cette définition, $\forall \epsilon > 0$ se lit “pour ϵ aussi petit que l'on veut”

Definition de la convergence d'une suite

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans cette définition, $\forall \epsilon > 0$ se lit “pour ϵ aussi petit que l'on veut”et $|u_n - \ell| < \epsilon$ se lit “la distance entre u_n et ℓ est plus petite que ϵ”.

Definition de la convergence d'une suite

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans cette définition, $\forall \epsilon > 0$ se lit "pour ϵ aussi petit que l'on veut"et $|u_n - \ell| < \epsilon$ se lit "la distance entre u_n et ℓ est plus petite que ϵ".
Autrement dit, cette définition nous dit que quitte à prendre n assez grand, la suite (u_n) se rapproche de ℓ aussi près que l'on veut.

Exemples...

- la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit.

Exemples...

- la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit.On dit alors que (u_n) a pour limite 0 et on note
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Exemples...

- la suite (u_n) définie par

  $$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

  a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit.On dit alors que (u_n) a pour limite 0 et on note

  $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

- Contrairement à la suite (u_n) précédente, la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$ ne se rapproche d'aucun nombre.

Exemples...

- la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit.On dit alors que (u_n) a pour limite 0 et on note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

- Contrairement à la suite (u_n) précédente, la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$ ne se rapproche d'aucun nombre. Les termes v_n sont de plus en plus grands. Dans ce cas, on note
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Exemples...

Exemples...

- Enfin la suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$, prend alternativement les valeurs 1 et -1.

Exemples...

- Enfin la suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$, prend alternativement les valeurs 1 et -1.Une telle suite n'a donc pas de limite.

Proposition

On a :

1. *Toute suite croissante et majorée, converge.*
2. *Toute suite décroissante et minorée, converge.*

Proposition

On a :

1. *Toute suite croissante et majorée, converge.*
2. *Toute suite décroissante et minorée, converge.*

Exemple d'application : Voir exos en TD.

Limites et inégalités

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et soient ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Limites et inégalités

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et soient ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Remarque : si $u_n < v_n$ pour tout n, on peut avoir $\ell_1 = \ell_2$.
Penser à $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

Limites et inégalités

De même, on a un théorème d'encadrement connu sous le nom de théorème des gendarmes :

Limites et inégalités

De même, on a un théorème d'encadrement connu sous le nom de théorème des gendarmes :

Théorème

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$
2. (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes et* $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n w_n = \ell.$

Alors la suite (v_n) converge également et $\lim\limits_n v_n = \ell.$

Limites et inégalités

De même, on a un théorème d'encadrement connu sous le nom de théorème des gendarmes :

Théorème

Soient (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites telles que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$
2. (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes et* $\lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell.$

Alors la suite (v_n) *converge également et* $\lim_n v_n = \ell.$

Exemple d'application : $u_n = \frac{|cos(n)|}{n}$

Limites et inégalités

De même, on a un théorème d'encadrement connu sous le nom de théorème des gendarmes :

Théorème

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$
2. (u_n) *et* (w_n) *sont convergentes et* $\lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell.$

Alors la suite (v_n) converge également et $\lim_n v_n = \ell.$

Exemple d'application : $u_n = \frac{|cos(n)|}{n}$
(Utiliser l'encadrement $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$)

Définition suites arithmétiques

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Si on passe de chaque terme au suivant* ***en ajoutant*** *la même quantité* r *(raison) alors la suite est dite arithmétique.*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Définition suites arithmétiques

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant ***en ajoutant*** *la même quantité r (raison) alors la suite est dite arithmétique.*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemples de modélisation

Capital placé à intéret simple (tirelire)

Expression d'une suite arithmétiques

Théorème

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_n = u_0 + nr$$

De manière plus générale, le n ième terme s'obtient à partir du p iéme en ajoutant $n - p$ fois la raison r :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

- *Si* $r > 0$, *la suite u est croissante.*
- *Si* $r < 0$, *la suite u est décroissante.*
- *Si* $r = 0$, *la suite u est stationnaire.*

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

- *Si $r > 0$, la suite u est croissante.*
- *Si $r < 0$, la suite u est décroissante.*
- *Si $r = 0$, la suite u est stationnaire.*

Proposition

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

- *Si $r > 0$, la suite u diverge vers $+\infty$.*
- *Si $r < 0$, la suite u diverge vers $-\infty$.*
- *Si $r = 0$, la suite u converge vers u_0.*

Somme des N premiers termes d'une suite arithmétiques

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétiques de raison r. Posons

$$S_N = \sum_{k=0\ldots N} u_k.$$

Alors, pour tout n, on a :

$$S_n = \frac{(N+1)(u_0+u_N)}{2} = \frac{(N+1)(2u_0+Nr)}{2}.$$

Application : on a

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Definition suites géométriques

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant ***en multipliant*** *par la même quantité q (raison) alors la suite est dite géométrique.*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Definition suites géométriques

Definition

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant ***en multipliant*** *par la même quantité q (raison) alors la suite est dite géométrique.*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il suffit de montrer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

Exemples de modélisation

Capital placé à intéret composé (remboursement pret)

Théorème

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Théorème

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

De manière plus générale, le n iéme terme s'obtient à partir du p iéme en multipliant $n - p$ fois la raison q :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Quelques propriétés élémentaires

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

- *Si* $u_0 = 0$ *ou* $q = 0$*, la suite u est stationnaire égale à 0.*
- *Si* $u_0 \neq 0$ *et* $q = 1$*, la suite u est stationnaire égale à* u_0*.*
- *Si* $u_0 \neq 0$*,* $q \neq 1$ *et* $q > 0$ *la suite est monotone :*
  - *croissante si* $u_0 \times (q - 1) > 0$*,*
  - *décroissante sinon.*
- *Si* $u_0 \neq 0$*,* $q \neq 1$ *et* $q < 0$ *la suite est alternée.*

Quelques propriétés élémentaires

Proposition

Soit u une suite géométrique de raison q, alors

- *Si $q < -1$, la suite u diverge (oscillation de signe et $|u_n|$ tend vers $+\infty$).*
- *Si $|q| < 1$, la suite u converge vers 0.*
- *Si $q > 1$, la suite u tend vers $\pm\infty$, selon le signe de u_0.*
- *Si $q = 1$, la suite u converge vers u_0.*
- *Si $q = -1$, la suite est alternée (elle vaut $-u_0$ puis u_0, etc...) elle ne converge pas.*

Somme des N premiers termes d'une suite arithmétiques

Proposition

Soit $(u_n)_n$ *une suite géométrique de raison* $q \neq 1$*. Posons*

$$S_N = \sum_{k=0 \ldots N} u_k.$$

Alors, pour tout n, on a :

$$S_n = u_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Application : Pour $x \neq 1$,

$$S = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$